

MODELLI MATEMATICI DI STORIE D'AMORE

Sergio Rinaldi^{1,2*} e Fabio Della Rossa^{1†}

¹Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria,
Politecnico di Milano, Milano

²International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg,
Austria

Sommario

In questo articolo sono descritti i principali risultati finora ottenuti nel contesto della modellistica delle relazioni d'amore. I modelli sono di tipo descrittivo e studiano l'evoluzione dei sentimenti di due individui a partire da uno stato iniziale di indifferenza fino al raggiungimento di un regime sentimentale stazionario, periodico, o addirittura aperiodico. I modelli più semplici sono costituiti da due equazioni differenziali (una per lei e una per lui) contenenti le informazioni essenziali sul modo con cui ogni individuo reagisce all'amore e al fascino dell'altro. Analizzando i modelli si possono ricavare, senza bisogno di alcun dato, le proprietà fondamentali delle storie d'amore tra individui di varie categorie: sicuri o insicuri, non polarizzati o polarizzati (tra cui, platonici o sinergici), ...

Così facendo si capisce, ad esempio, perché in coppie di individui sicuri ci sia una marcata tendenza ad aumentare il proprio fascino nella fase del corteggiamento, o perché piccole scoperte riguardanti il partner possano avere conseguenze (positive o negative) sorprendentemente grandi (catastrofi). Coppie di individui insicuri hanno invece una decisa propensione ad interrompere la relazione dopo un certo tempo. Infine, si scopre che regimi sentimentali altalenanti sono possibili a causa della copresenza di insicurezza e sinergismo e che le crisi ricorrenti possono lentamente sparire o attenuandosi o rarefacendosi nel tempo. In conclusione, per mezzo di questi modelli, proprietà come quelle appena descritte, note agli psicanalisti che le hanno scoperte esercitando la loro professione, sono finalmente capite e spiegate: un risultato di indubbio valore.

Tutti i fenomeni sopra citati riguardano coppie estremamente semplici, in cui l'evoluzione della storia d'amore è dominata dalle interazioni tra i partner. Ma nella realtà le relazioni interpersonali sono molto più complesse perché risentono anche dell'ambiente sociale in cui la coppia vive. Successi e insuccessi nella professione, problemi di salute, lunghi e ripetuti periodi di assenza forzata, esistenza di importanti passioni, come quelle tipiche degli artisti, sono tutti fattori che interferiscono, anche notevolmente, con l'evoluzione dei sentimenti. Per modellizzare

*sergio.rinaldi@polimi.it

†fabio.dellarossa@polimi.it

coppie così complesse, è necessario far uso di modelli con tre o più equazioni differenziali, che possono essere analizzati solo per via numerica. Tali modelli possono spiegare anche regimi sentimentali caotici e, quindi, imprevedibili. Finora ciò è stato fatto solo per un numero limitato di casi, in particolare per relazioni tendenzialmente instabili come quelle triangolari. Tuttavia, i risultati ottenuti sono così incoraggianti da far pensare che l'intero settore scientifico debba, in tempi brevi, espandersi significativamente.

Il lettore che desideri approfondire quanto esposto in questo articolo potrà fare riferimento al libro "Modeling Love Dynamics", pubblicato nel 2016 da World Scientific (autori: Sergio Rinaldi, Fabio Della Rossa, Fabio Dercole, Alessandra Gragnani e Pietro Landi). A chi sia invece interessato a una sintesi dell'argomento e a un breve commento sul senso e sul valore di questi studi si consigliano le seguenti rassegne critiche: "The equations of love", di Marten Scheffer (<http://blogs.nature.com/aviewfromthebridge/2016/05/20/the-equations-of-love>), "A review of the book Modeling Love Dynamics", di Gustav Feichtinger (<http://www.oegor.at/files/news/news24.pdf>) e "Perchè Rossella O'Hara ha fallito? Se l'amore è matematico", di Anna Meldolesi (<https://goo.gl/0jpkTd>).

1 Introduzione

Può la matematica essere utilizzata per prevedere l'evoluzione di una storia d'amore? Alcune decine di contributi scientifici, pubblicati principalmente da matematici negli ultimi due decenni, permettono ormai di dare almeno parzialmente una risposta positiva a questa domanda. Naturalmente la risposta è possibile solo ammettendo di essere capaci di tradurre in formule le caratteristiche psico-fisiche fondamentali degli individui coinvolti.

I tentativi di definire, più o meno rigorosamente, cosa si debba o possa intendere con parole come amore, coinvolgimento, interesse o sentimento, sono stati numerosissimi nella storia, in particolare in psicologia, sessuologia, sociologia e filosofia. Per esempio, già nel 17° secolo Madeleine de Scudéry riportava, in una sua famosa novella, "la Carte du Tendre", una sorta di classificazione dei possibili rapporti d'amore. Più recentemente sono state suggerite una serie di procedure come la *Passionate Love Scale* [Hatfield e Sprecher, 1986] e la *Romantic Belief Scale* [Sprecher e Metts, 1986] per stimare quantitativamente, in unità opportune, il grado di coinvolgimento di una persona per un'altra. Benché nessuna di queste proposte abbia ricevuto un consenso generale, alcune affermazioni frequenti anche nel linguaggio comune rivelano chiaramente la possibilità di eseguire confronti nel tempo (ad esempio, "la amo ogni giorno di più") o tra individui (ad esempio, "è certamente più coinvolto di me"). In alcune espressioni di questo tipo il coinvolgimento ha anche un segno (ad esempio, "non la amo più, anzi la odio"), zero essendo il valore corrispondente all'indifferenza.

Se, come proposto da Levinger [1980], l'interesse di una persona per l'altra è misurabile con un numero reale d'ora in avanti indicato con x , una storia d'amore tra due individui, diciamo 1=lei e 2=lui, può essere compattamente rappresentata con una linea (detta traiettoria) che mostra l'evoluzione contemporanea nel tempo t degli interessi di lei e di lui nello spazio dei sentimenti (x_1, x_2) . In Figura 1 sono rappresentate tre storie d'amore riguardanti coppie di individui inizialmente indifferenti l'uno all'altro ($x_1(0) = x_2(0) = 0$). Nella prima storia, i due individui sono sempre più coinvolti man mano che il tempo passa,

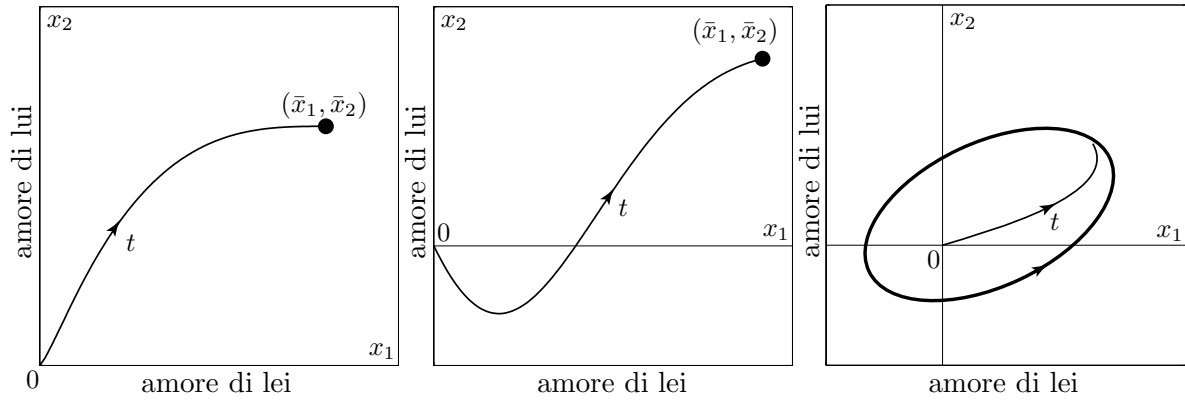


Figura 1: Tre diverse storie d'amore rappresentate con una traiettoria nello spazio dei sentimenti (x_1, x_2) .

mentre nella seconda storia lui è inizialmente antagonista ($x_2(t) < 0$ per t piccolo), ma poi finisce per essere positivamente coinvolto ($x_2(t) > 0$ per t grande). A differenza delle prime due storie che tendono verso un equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , la terza storia tende verso un ciclo, in cui lei alterna periodi di coinvolgimento a periodi di antagonismo e trascina lui in un regime altalenante.

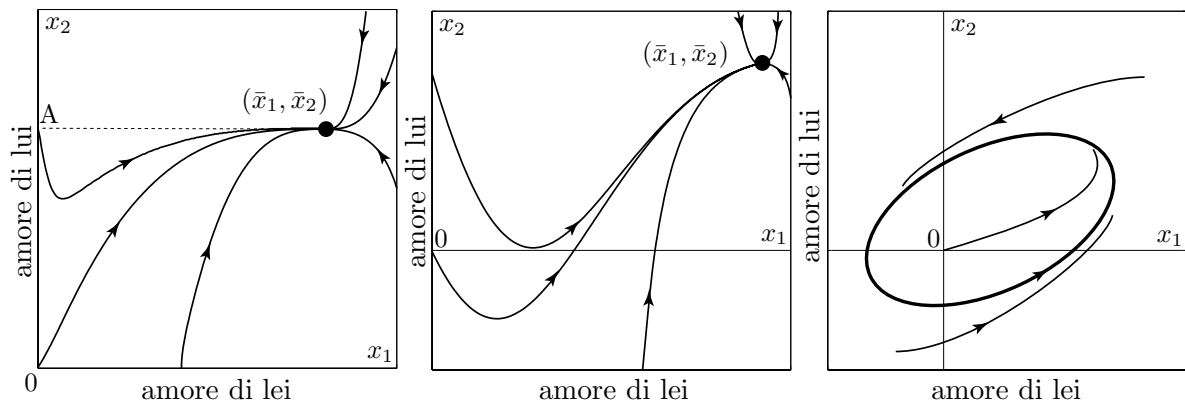


Figura 2: Quadri di traiettorie di tre coppie diverse. Le traiettorie che partono dall'origine sono quelle di Figura 1.

Per vari motivi può essere interessante fare riferimento, come mostrato in Figura 2, a *quadri di traiettorie*, cioè a insiemi di traiettorie radicate in punti iniziali $(x_1(0), x_2(0))$ diversi, così che sia facile immaginare, per interpolazione, come la storia d'amore di una certa coppia possa evolvere a partire da qualsiasi condizione iniziale. I quadri di traiettorie sono particolarmente utili per evidenziare le conseguenze di brevi ma rilevanti *shock* subiti dalla coppia. Per esempio, se la prima coppia di Figura 2 ha ormai raggiunto l'equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) e lei, all'insaputa di lui, ha una breve infatuazione per una terza persona, l'interesse x_1 di lei si riduce notevolmente, diciamo da \bar{x}_1 a 0, mentre quello di lui resta invariato. Il quadro delle traiettorie può allora essere usato per prevedere le conseguenze di questa temporanea avventura extraconiugale: infatti, quando l'avventura è finita, i due coinvolgimenti sono $(0, \bar{x}_2)$ (vedi punto A in Figura 2) e poiché la traiettoria

che parte da A tende di nuovo verso l'equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) si può dedurre che nel lungo termine lo shock viene riassorbito ma ha un temporaneo impatto negativo sul secondo individuo. Vedremo, nel seguito, che shock simili possono però avere, in altre coppie, effetti permanenti, perché possono dare luogo a transizioni da un regime sentimentale positivo a un regime sentimentale negativo.

2 Modelli EDO

Come in tutti gli altri settori delle scienze, quadri di traiettorie come quelli di Figura 2 possono essere facilmente prodotti per mezzo di semplici modelli matematici costituiti da *equazioni differenziali ordinarie* (EDO), una per lei e una per lui,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{1}$$

In realtà, una classe più vasta di modelli si potrebbe ottenere sostituendo nella (1) le derivate prime rispetto al tempo con derivate di ordine frazionario. Modelli di questo tipo sono stati già proposti in letteratura [Ahmad e El-Khazali, 2007; Song *e altri*, 2010; Koca e Ozalp, 2013; Koca, 2014; Liu e Chen, 2015] ma la loro rilevanza non è ancora stata provata nè con argomentazioni teoriche nè per mezzo di convincenti applicazioni.

In un certo numero di studi è stato mostrato come le (1) possano essere concettualmente giustificate e potenzialmente ricavate dalla teoria dei processi stocastici [Carbonaro e Serra, 2002; Carbonaro e Giordano, 2005; Bellomo e Carbonaro, 2006, 2008] o da principi generali della Meccanica Quantistica [Bagarello e Oliveri, 2010; Bagarello, 2011, 2012].

Alternativamente, le (1) possono essere ricavate ipotizzando che i due partner siano *agenti razionali* massimizzanti le loro funzioni di utilità. Questa idea, molto seguita in economia, porta spontaneamente alla formalizzazione di un *problema di controllo ottimo* la cui soluzione è appunto costituita dalle (1). Nel contesto delle dinamiche interpersonali questo approccio, iniziato da Hartl e Mehlmann [1984], è stato seguito da Jørgensen [1992] e da Feichtinger *e altri* [1999] e, più recentemente, da Rey [2010, 2013] e da Goudon e Lafitte [2015] che hanno approfondito il problema della determinazione del miglior compromesso tra costi associati al deterioramento di una relazione e costi necessari per mantenerla in vita.

Ma nella stragrande maggioranza dei contributi sulla modellizzazione delle relazioni d'amore, iniziata da Strogatz [1988], le (1) sono interpretate come equazioni di bilancio in cui le funzioni f_i sono differenze tra flussi di generazione e flussi di consumo dei sentimenti x_i dei due partner. In accordo con i principi fondamentali della *teoria dell'attaccamento* [Bowlby, 1969], il flusso di generazione R_i altro non è che la *reazione* di un individuo i alla cura aspettata dal partner j . Alcune di queste aspettative sono indipendenti dal sentimento x_j del partner perché legate soltanto a componenti del suo fascino quali bellezza, età, simpatia, grado di istruzione, ricchezza, mentre altre sono legate al coinvolgimento x_j del partner. Separando questi due tipi di reazione si può pertanto scrivere

$$R_i = R_i^A + R_i^L$$

dove R_i^A e R_i^L sono rispettivamente le reazioni al fascino (in inglese, Appeal) e all'amore (in inglese, Love) del partner j . In analogia a quanto fatto in fisica e in biologia, in tutti i modelli di cui siamo a conoscenza il flusso di consumo è assunto essere proporzionale alla quantità x_i secondo un coefficiente di proporzionalità α_i . Tale coefficiente è chiamato *coefficiente di oblio* perché un individuo i che è stato abbandonato dal partner e non ha quindi più possibilità di rigenerare il proprio sentimento è descritto dalla semplice equazione $dx_i/dt = -\alpha_i x_i$. Tale equazione afferma che il partner viene dimenticato con legge esponenziale

$$x_i(t) = x_i(0) \exp(-\alpha_i t)$$

in cui l'inverso del coefficiente di oblio è il cosiddetto *tempo di oblio* (il 70% di questo tempo è noto in fisica e in biologia come tempo di dimezzamento). Il processo di oblio ha certamente una origine evoluzionistica (individui che dimenticano più in fretta hanno maggiori possibilità di trovare un nuovo partner e quindi di poter ancora procreare) ma il coefficiente di oblio α_i dipende anche molto dalla cultura della società in cui l'individuo vive (si pensi, ad esempio, all'uso prolungato del lutto, solo recentemente abbandonato nei paesi mediterranei).

In conclusione, il modello delle relazioni di coppia è

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= R_1^A(A_2) + R_1^L(x_2) - \alpha_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= R_2^A(A_1) + R_2^L(x_1) - \alpha_2 x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

dove A_i è il fascino dell'individuo i . Come già detto, tale fascino ha diverse componenti che possiamo indicare con A_i^h , ognuna apprezzata diversamente dal partner j . Se λ_j^h è l'apprezzamento che l'individuo j ha per la componente h -esima del fascino di i , possiamo definire il fascino di i percepito da j come

$$A_i = \sum_h \lambda_j^h A_i^h.$$

Pertanto, il fascino di una persona non è un tratto individuale, ma piuttosto un valore percepito dal partner (attuale o futuro). Dato che nella stragrande maggioranza dei casi il fascino di ogni individuo rimane praticamente invariato per periodi di tempo anche lunghi non è limitativo considerarlo costante e, pur di ridefinirlo opportunamente, scrivere

$$R_i^A(A_j) = \gamma_i A_j$$

dove γ_i è la sensibilità di i al fascino di j . Poiché il sentimento d'amore varia invece in modo anche molto consistente a partire dal primo incontro fino al raggiungimento di un regime sentimentale permanente è fondamentale precisare nel modello (2) le funzioni di reazione all'amore.

In Figura 3 sono rappresentate quattro reazioni all'amore che sono state tra le più usate finora. Le prime due ((i) e (ii)) sono crescenti e rivelano, quindi, l'apprezzamento per grandi coinvolgimenti del partner (amo essere amato), mentre le altre due ((iii) e (iv)) rivelano invece che coinvolgimenti eccessivi non sono graditi.

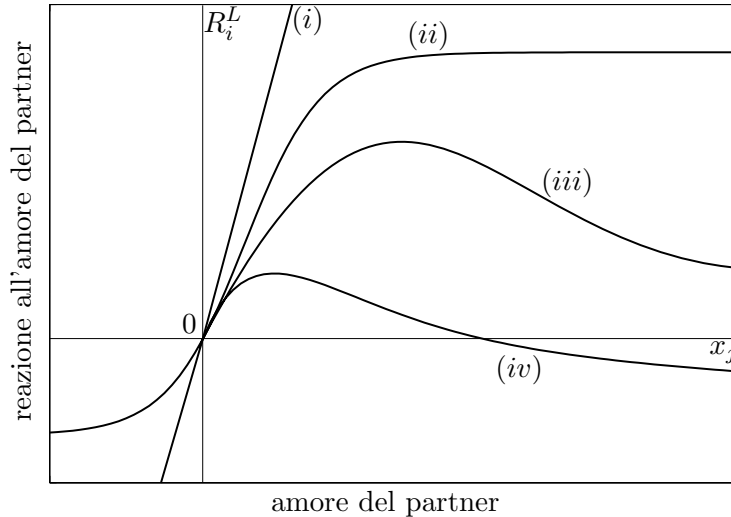


Figura 3: Esempi di reazione all’amore del partner $R_i^L(x_j)$. Le curve (i) e (ii) sono quelle di individui sicuri, mentre le curve (iii) e (iv) sono quelle di individui insicuri.

3 Il modello lineare

La reazione (i) di Figura 3, che è di pura proporzionalità ($R_i^L(x_j) = \beta_i x_j$), ha il vantaggio di dar luogo a equazioni differenziali lineari

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \gamma_1 A_2 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma_2 A_1 + \beta_2 x_1 - \alpha_2 x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

le cui soluzioni sono ricavabili analiticamente. Non è quindi sorprendente che il primo studio di dinamica dell’amore [Strogatz, 1988] sia stato effettuato proprio con questo modello poi usato da molti autori [Radzicki, 1993; McDill e Felsager, 1994; Strogatz, 1994; Rinaldi, 1998b; Felmlee e Greenberg, 1999; Zhao e Guan, 2013] e anche esteso per trattare il caso di relazioni interpersonali caratterizzate da ritardi di tempo [Bielczyk *e altri*, 2012] o per interpretare le relazioni d’amore in termini di logica “neutrosofica” [Patro, 2016]. Il modello (3) con parametri $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, A_i$ positivi ha comunque proprietà molto interessanti [Rinaldi, 1998b]. In particolare, il modello è stabile, cioè i coinvolgimenti restano limitati, se

$$\beta_1 \beta_2 < \alpha_1 \alpha_2 \quad (4)$$

cioè se gli individui dimenticano sufficientemente in fretta e/o non sono troppo reattivi. In tal caso, il regime sentimentale verso cui la coppia tende è positivo, nel senso che all’equilibrio $\bar{x}_1 > 0$ e $\bar{x}_2 > 0$. Inoltre, un incremento permanente del fascino di uno dei due individui migliora il regime sentimentale di entrambi ma con un vantaggio relativo superiore per il partner; in altre parole, c’è un tocco di altruismo in chi, in un modo o in un altro, migliora qualche componente del proprio fascino. Infine, individui inizialmente indifferenti hanno storie d’amore caratterizzate da coinvolgimenti sempre crescenti, come quelle spesso descritte nei classici film Hollywoodiani (vedi Figura 4).



Figura 4: Locandine di due classici film Hollywoodiani (*L'amore è una cosa meravigliosa*, 1955 e *Titanic*, 1997).

4 Coppie di individui sicuri

La seconda reazione all'amore riportata in Figura 3 (curva (ii)) ha ancora la proprietà di essere crescente, ma è però limitata. Questa è la reazione di individui che amano essere amati e, quindi, aumentano la loro reazione all'aumentare dell'interesse del partner, ma non possono avere reazioni illimitate (ipotesi irrealistica). Come già detto, individui di questo tipo sono detti *sicuri* [Bartholomew e Horowitz, 1991; Griffin e Bartholomew, 1994; Rinaldi e Gragnani, 1998b] e rappresentano una porzione significativa della popolazione. Ovviamente, individui con reazione lineare (curva (i)) possono essere considerati sicuri benché estremi. La limitatezza della reazione (ii) garantisce che coppie di individui sicuri abbiano storie d'amore con sentimenti limitati anche se la condizione (4) non è soddisfatta.

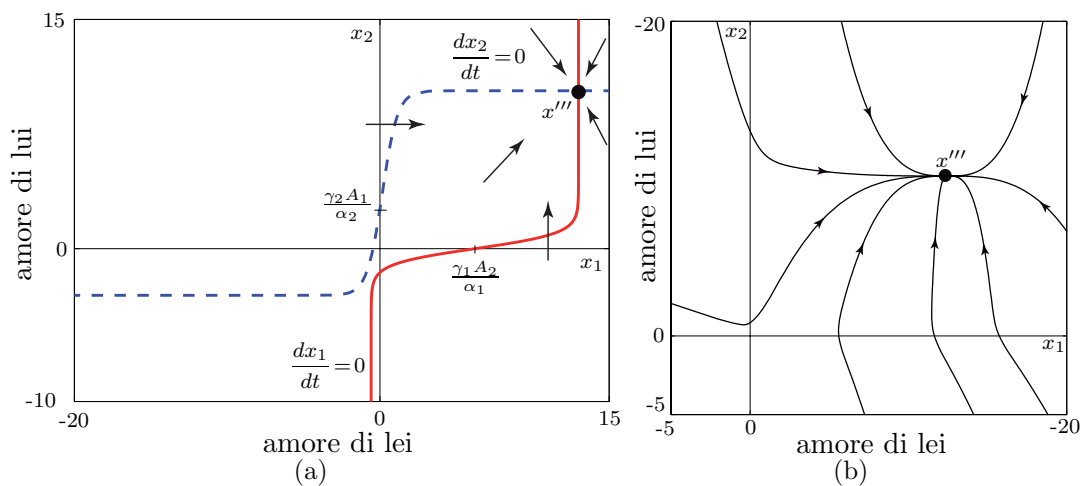


Figura 5: Modello (2) per coppie di individui sicuri e molto affascinanti con reazione all'amore di tipo (ii) (vedi Figura 3): (a) le isocline si intersecano in un solo punto; (b) quadro delle traiettorie.

Inoltre, le due isocline $dx_1/dt = 0$ e $dx_2/dt = 0$, date da

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_1} \left(R_1^L(x_2) + \gamma_1 A_2 \right), \quad x_2 = \frac{1}{\alpha_2} \left(R_2^L(x_1) + \gamma_2 A_1 \right)$$

traslano una orizzontalmente e l'altra verticalmente al variare di $\gamma_1 A_2/\alpha_1$ e $\gamma_2 A_1/\alpha_2$, come si evince dalla Figura 5a, e si intersecano quindi in un unico punto di equilibrio se i due individui sono sufficientemente affascinanti. Il corrispondente quadro delle traiettorie, riportato in Figura 5b, mostra che, come nel caso lineare, coppie di individui inizialmente indifferenti sono caratterizzate da coinvolgimenti sempre crescenti.

Più intrigante è il caso in cui almeno uno dei due individui (ad esempio, lui) non sia particolarmente affascinante o sia addirittura repellente, come nelle storie descritte in *La Bella e la Bestia* e *Cyrano De Bergerac*, portate sul grande schermo da Walt Disney e da Jean-Paul Rappeneau (si veda Figura 6). In tal caso, infatti, le isocline sono come nella Figura 7a, che è stata ottenuta dalla Figura 5a traslando la prima isoclina ($dx_1/dt = 0$) verso sinistra poiché $A_2 < 0$. A causa della loro geometria questa volta le isocline si intersecano in tre stati di equilibrio x' , x'' e x''' con

$$x' < x'' < x'''$$

Una semplice analisi dello Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{vmatrix}$$

valutato nei tre equilibri permette di dimostrare che x' e x''' sono stabili e che x'' è una sella [Rinaldi e Gragnani, 1998a]. La varietà stabile della sella è pertanto la frontiera dei bacini di attrazione dei due equilibri stabili, come mostrato nel quadro di traiettorie



Figura 6: Locandine di due film che descrivono storie d'amore di coppie in cui lui è repellente (*La Bella e la Bestia*, 1991 e *Cyrano de Bergerac*, 1990).

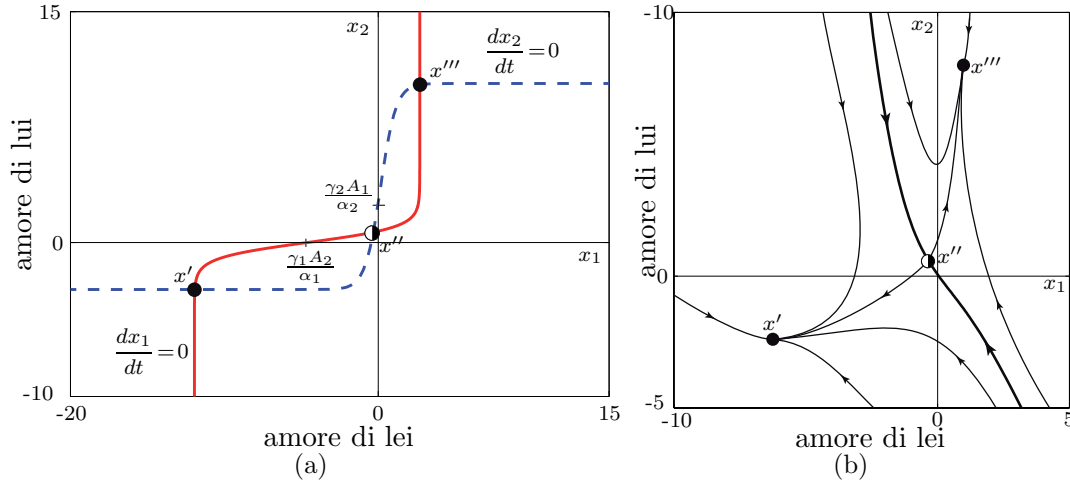


Figura 7: Modello (2) per coppie di individui sicuri con lui repellente: (a) le isocline si intersecano in tre punti; (b) quadro delle traiettorie.

di Figura 7b. In conclusione, in questo caso la coppia è un *sistema bistabile* in cui x' e x''' rappresentano regimi sentimentali stazionari radicalmente diversi perché di segno opposto.

Come visto, le coppie di individui sicuri possono essere quindi sia *robuste*, cioè avere un unico regime sentimentale positivo verso cui si ritorna dopo qualsiasi shock (come in Figura 5), che *fragili*, cioè avere due regimi sentimentali alternativi, uno positivo e uno negativo, come in Figura 7. In quest'ultimo caso la coppia è a rischio perché uno shock sufficientemente forte può dar luogo a una transizione nello spazio (x_1, x_2) da un bacino di attrazione all'altro. Per esempio, un'avventura extraconiugale può far sì che una coppia in regime sentimentale positivo x''' si ritrovi nel regime di antagonismo x' e lì resti per sempre a meno che un nuovo shock (eventualmente suggerito da un esperto) favorisca la transizione opposta.

A questo punto nascono spontaneamente due domande interessanti. La prima è: quali coppie tra quelle fragili convergono verso il regime positivo x''' se gli individui sono inizialmente indifferenti? Una risposta qualitativa a questa domanda può essere data con le isocline, mentre una risposta quantitativa si può ottenere soltanto con analisi di tipo numerico [Rinaldi e altri, 2010]. La seconda domanda è: possono gli individui di una coppia fragile evitare il rischio di convergere verso il regime insoddisfacente x' seguendo una opportuna strategia comportamentale durante la fase iniziale della relazione? Una risposta a questa domanda si può ottenere giocando una volta di più con le isocline del modello. Il risultato è che il regime positivo può essere raggiunto se almeno uno dei due individui aumenta temporaneamente con qualche inganno il suo fascino, o simula di essere più coinvolto di quanto in realtà non sia. Questi comportamenti sono facilmente osservabili soprattutto nella fase del corteggiamento. Una ragazza che si presenta al primo incontro ben truccata e con il più bel vestito e un ragazzo che va all'appuntamento con una macchina presa in prestito da un amico sono esempi evidenti di questi comportamenti. Ma se la relazione prende la piega giusta, questo imbroglio innocente ma difficile da sostenere a lungo può essere interrotto non appena la coppia è finalmente entrata nel bacino di attrazione dell'equilibrio x''' . Naturalmente, un modello ben articolato [Rinaldi

e altri, 2015] può anche spiegare forme di inganno temporaneo decisamente più sofisticate come quelle descritte da Edmond Rostand nel suo “Cyrano de Bergerac”, il capolavoro della letteratura romantica francese.

La geometria delle isocline spiega anche le conseguenze che scoperte di aspetti nascosti delle caratteristiche di uno dei partner possono avere sulla relazione di coppia. Per esempio, in *Orgoglio e Pregiudizio*, uno dei più popolari romanzi d’amore inglesi dell’Ottocento, una semplice lettera rivela a lei alcuni aspetti non noti del fascino di lui e spinge immediatamente i due verso una unione felicemente corrisposta [Rinaldi e altri, 2014]. Questa transizione è facilmente spiegabile facendo riferimento alla Figura 7a. Prima della scoperta la coppia è nell’equilibrio insoddisfacente x' ma dopo la scoperta l’isoclina $dx_1/dt = 0$ si è spostata così tanto verso destra (perché A_2 è aumentato) che gli equilibri x' e x'' non esistono più e la coppia non può che tendere verso l’equilibrio positivo.

In molti altri casi la percezione del fascino varia molto lentamente attraverso una lunga serie di piccole rivelazioni cui corrisponde una lenta variazione dei sentimenti [Rinaldi e altri, 2013b]. È questo il caso del già citato *La Bella e la Bestia* in cui A_2 aumenta gradualmente. Le conseguenze si intravedono di nuovo facilmente con la Figura 7a. L’isoclina $dx_1/dt = 0$ si sposta lentamente verso destra così che l’equilibrio x' in cui si trova la coppia si avvicina sempre più alla sella x'' fino a collidere con essa. Per un ulteriore incremento anche molto piccolo del fascino A_2 l’equilibrio x' sparisce e l’unico regime sentimentale possibile è quello positivo. Si assiste così a una sorprendente transizione macroscopica dei sentimenti innescata da una variazione microscopica di un parametro. Nelle scienze sociali e in biologia transizioni di questo tipo sono note come *transizioni critiche* [Scheffer, 2009] mentre il punto di collisione tra l’equilibrio x' e la sella x'' è spesso chiamato *punto di ribaltamento* (tipping point) [Gladwell, 2000; van Nes e altri, 2016]. Da un punto di vista formale il fenomeno è una *biforcazione catastrofica* (nota come *nodo-sella*), caratterizzata dall’annullamento di uno degli autovalori dello Jacobiano valutato nell’equilibrio.

Per continuità, quando si è prossimi alla biforcazione, uno dei due autovalori dello Jacobiano valutato nel nodo stabile è quasi nullo. Poiché nell’intorno di ogni nodo stabile i transitori sono somma di esponenziali evanescenti del tipo $\exp(-t/T)$ dove le costanti di tempo T sono l’inverso del modulo degli autovalori, ne consegue che quando si è prossimi a una biforcazione nodo-sella le perturbazioni vengono assorbite molto lentamente. In altre parole, avvicinandosi a una biforcazione catastrofica i transitori rallentano. Questa proprietà può essere utilmente tenuta presente per ricavare *segnali premonitori* di incipienti separazioni. Infatti se una coppia è nell’equilibrio positivo x''' e al passare del tempo il fascino di lui A_2 e/o l’interesse di lei γ_1 diminuiscono lentamente, l’isoclina $dx_1/dt = 0$ di Figura 7a trasla verso sinistra e l’equilibrio stabile x''' si avvicina alla sella fino a collidere con essa. Immediatamente dopo la collisione la coppia ha una consistente e spiacevole transizione verso il regime antagonista x' e, per ovvi motivi, questa transizione ha spesso come conseguenza l’interruzione della relazione (per esempio, il divorzio). Quindi, per quanto detto in precedenza, un segnale premonitore della incipiente separazione di una coppia è l’allungamento dei tempi di riconciliazione, cioè dei tempi necessari a entrambi i partner per ritornare all’equilibrio dopo un qualsiasi bisticcio. Da quanto ci risulta, segni premonitori come questi non sono stati mai discussi nella letteratura scientifica di settore ma sono stati invece scoperti attraverso osservazioni di psicoanalisti di coppia (si vedano, ad esempio, <http://www.professional-counselling.com/>

warning-signs-of-a-breakup.html e gli studi di Prior [2014]).

5 Coppie di individui insicuri

Non tutti gli individui sono sicuri. Esistono infatti persone la cui reazione cresce con l'amore del partner solo fino a una certa soglia. Ma se la soglia viene superata, l'insicuro comincia a essere infastidito dalle troppo pressanti attenzioni del partner e la sua reazione si indebolisce fino ad annullarsi (curva (iii) di Figura 3) o a diventare, in casi estremi, addirittura negativa (curva (iv) di Figura 3). Uomini e donne molto attirati dalla fase del corteggiamento e della conquista ma incapaci poi di fondersi con il partner sono tipici insicuri. Le isocline del modello (2) sono in questo caso come in Figura 8a dove sono riportate quelle usate per studiare la prima fase della relazione tra Scarlett e Rhett descritta in *Via col Vento* [Rinaldi e altri, 2013a]. Anche questa volta ci sono tre intersezioni e quindi tre equilibri, x' , x'' , e x''' , di cui x' e x''' sono stabili, mentre quello centrale x'' è una sella. La situazione è quindi sostanzialmente diversa da quella precedentemente illustrata per le coppie fragili di individui sicuri perché nessuno dei due equilibri è soddisfacente per entrambi i partner. Infatti, in x' lei è poco coinvolta mentre in x''' è lui a essere scarsamente soddisfatto. In Figura 8b è riportato il corrispondente quadro delle traiettorie che mostra come al termine della prima fase della relazione tra Scarlett e Rhett la coppia sia nell'equilibrio x' . E questo è coerente con la famosa scena del film (vedi Figura 9a) in cui, mentre Atlanta brucia sullo sfondo, lei lo schiaffeggia rifiutando il matrimonio che lui le ha appena proposto. Dopo un periodo di separazione dovuto alla guerra civile i due si incontrano di nuovo, ma le condizioni sono mutate: lui si è molto arricchito mentre lei è caduta in disgrazia e ha bisogno di ingenti quantità di denaro per

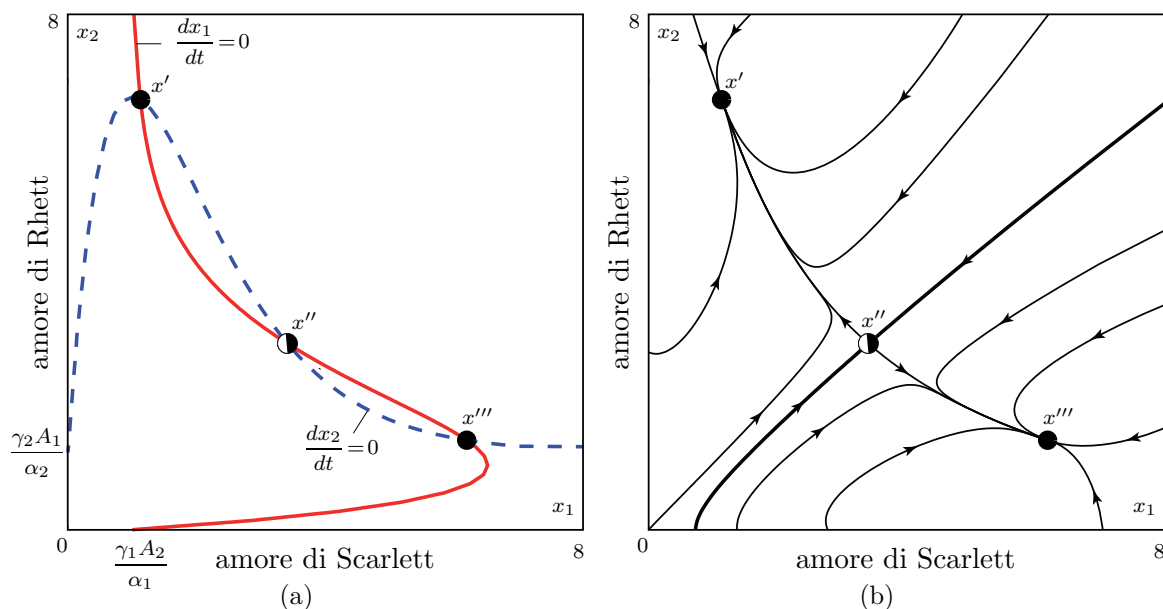


Figura 8: Modello (2) per coppie di individui insicuri con lei più affascinante di lui: (a) le isocline si intersecano in tre punti; (b) quadro delle traiettorie.



Figura 9: Due scene dal film *Via col Vento*: (a) Scarlett schiaffeggia Rhett al termine della prima fase della loro relazione; (b) Rhett la abbandona al termine della seconda fase della loro relazione.

salvare le sue proprietà. Questo fa sì che siano aumentati sia una delle componenti del fascino di lui che l'interesse γ_1 di lei per quella componente del fascino. Le isocline che descrivono questa seconda fase della relazione sono quindi quelle riportate in Figura 10a, ottenute traslando verso destra l'isoclina $dx_1/dt = 0$. Le isocline si intersecano, quindi, in un unico equilibrio caratterizzato da uno scarso interesse di lui, e questo è perfettamente coerente con l'ultima scena del film in cui lui, abbandonandola, reagisce alle suppliche di lei con il lapidario "Francamente, mia cara, me ne infischio" (Figura 9b).

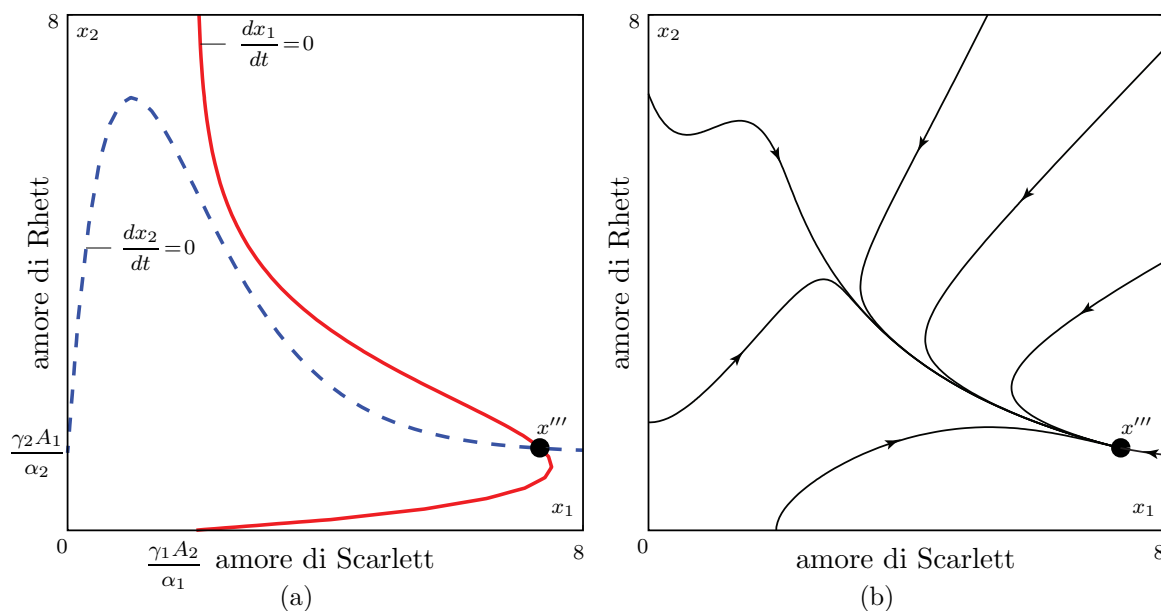


Figura 10: Modello (2) per coppie di individui insicuri con lui più affascinante di lei e lei decisamente sensibile al fascino di lui: (a) le isocline si intersecano in un unico punto; (b) quadro delle traiettorie.



Figura 11: Liz Taylor e i suoi otto matrimoni.

L'analisi sopra descritta di *Via col Vento* mostra che le storie d'amore di individui insicuri sono facilmente di tipo "usa e getta". Questa conclusione è confermata dalla vita di molti personaggi famosi, come, ad esempio, la bellissima Liz Taylor che, descritta nelle sue biografie come decisamente insicura, si è sposata ben otto volte (vedi Figura 11).

6 Sinergismo, insicurezza e alti e bassi nelle relazioni di coppia

In tutti i casi esaminati finora abbiamo avuto a che fare con storie d'amore che convergono verso un regime stazionario. Ciò è consistente con il fatto che la divergenza del modello (2)

$$\text{div} f = \frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2} = -\alpha_1 - \alpha_2$$

non cambia segno per cui, per il teorema di Bendixon, non possono esistere cicli limite [Strogatz, 1994]. È noto invece che nella realtà molte coppie hanno relazioni con ricorrenti e rilevanti alti e bassi. Ciò significa che il modello (2) deve essere modificato per spiegare regimi sentimentali di questo tipo. Sulla base dell'esperienza e della letteratura (anche non scientifica) disponibile sull'argomento, la modifica più spontanea è quella di introdurre una caratteristica individuale, la *polarizzazione*, che non abbiamo finora preso in considerazione.

Gli individui polarizzati sono quelli che reagiscono diversamente al fascino e all'amore del partner a seconda di quanto ne siano innamorati. Il caso più noto di polarizzazione è quello di quei genitori che vedono i loro figli bellissimi anche se non lo sono affatto

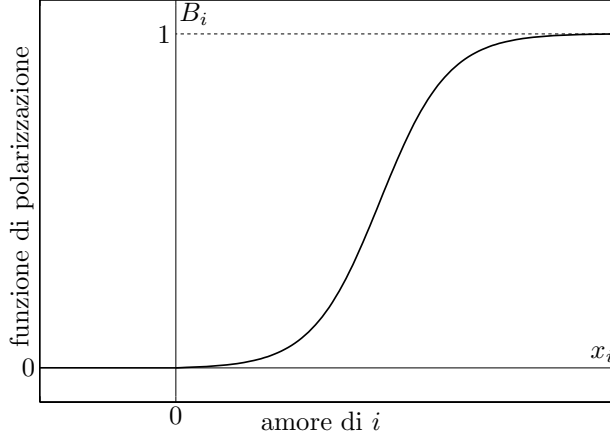


Figura 12: Grafico di una tipica funzione di polarizzazione $B_i(x_i)$.

(come nel detto napoletano “Ogne scarrafone è bell’a mamma soja”). Ma lo stesso tipo di polarizzazione è stato scoperto anche nelle coppie, osservando che una persona è sistematicamente ritenuta più affascinante dal proprio partner [Simpson *e altri*, 1990]. Le coppie di individui polarizzati sono state quindi modellizzate dalle due seguenti EDO

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= R_1^A(x_1, A_2) + R_1^L(x_1, x_2) - \alpha_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= R_2^A(x_2, A_1) + R_2^L(x_2, x_1) - \alpha_2 x_2\end{aligned}\quad (5)$$

con le funzioni di reazione date da

$$R_i^A(x_i, A_j) = (1 + b_i^A B_i^A(x_i)) \gamma_i A_j, \quad R_i^L(x_i, x_j) = (1 + b_i^L B_i^L(x_i)) R_i^L(x_j) \quad (6)$$

dove $R_i^L(x_j)$ è la reazione dell’individuo i nel caso in cui non sia assolutamente coinvolto. Nelle (6) b_i è il *coefficiente di polarizzazione* (in inglese bias) e B_i è la *funzione di polarizzazione*, tipicamente nulla per $x_i \leq 0$ e crescente per $x_i > 0$ come mostrato in Figura 12. Gli individui con $b_i > 0$ sono detti *sinergici*, perché aumentano le loro reazioni quando innamorati, mentre negli individui con $b_i < 0$, detti *platonici*, l’innamoramento attenua le reazioni.

La possibile esistenza di cicli limite nel modello (5,6) è stata provata con numerosi esempi. Il più semplice [Rinaldi *e altri*, 2016] è forse quello di coppie di individui insicuri e sinergici nella reazione al fascino, descritti quindi dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (1 + b_1^A B_1^A(x_1)) \gamma_1 A_2 + R_1^L(x_2) - \alpha_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (1 + b_2^A B_2^A(x_2)) \gamma_2 A_1 + R_2^L(x_1) - \alpha_2 x_2\end{aligned}\quad (7)$$

Simulazioni e analisi di biforcazione del modello (7) mostrano che per bassi valori del coefficiente di polarizzazione la coppia tende verso un regime stazionario (in accordo con quanto visto in precedenza). Aumentando la polarizzazione il regime stazionario diventa instabile e nasce contemporaneamente un regime periodico stabile come mostrato in Figura 13. Inizialmente, le oscillazioni sentimentali dei due individui sono molto contenute

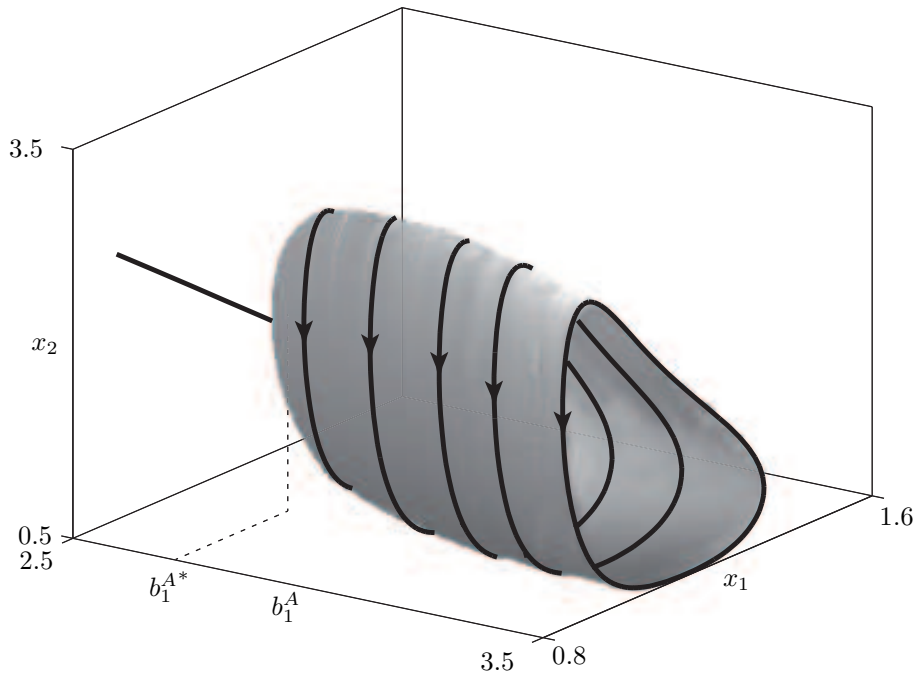


Figura 13: L'attrattore del modello (7) in funzione del coefficiente di polarizzazione. Il valore b_1^{A*} individua la biforcazione di Hopf.

ma diventano poi molto evidenti se la polarizzazione è ulteriormente aumentata. Questo tipo di emergenza di un regime turbolento è chiaramente dovuto a una *biforcazione di Hopf* [Strogatz, 1994; Kuznetsov, 2004] ed è individuabile anche variando altri parametri del modello.

Quello di Hopf non è tuttavia l'unico meccanismo secondo cui la turbolenza può nascere o sparire in una coppia. Per esempio, nello studio in cui sono stati scoperti per la prima volta regimi sentimentali periodici [Gragnani *e altri*, 1997], è stata evidenziata anche la possibilità (legata all'esistenza di una *biforcazione omoclina* [Kuznetsov, 2004]) che episodi periodicamente ricorrenti di entusiasmo o di crisi possano sparire, all'aumentare dell'età, diventando sempre più rari nel tempo.

7 Dinamiche complesse e imprevedibilità

Dinamiche di coppia come quelle finora discusse sono dette *semplici* perché descritte solo da due equazioni differenziali che interpretano le interazioni tra i coinvolgimenti dei due individui. Ma la coppia non è mai isolata dal resto del mondo: successi e insuccessi nella professione, problemi di salute in famiglia, lunghi e ripetuti periodi di separazione forzata, interferiscono, anche in modo rilevante, con l'evoluzione dei sentimenti. Inoltre, alcuni individui (come gli artisti) hanno anche altre importanti dimensioni emotive (come l'ispirazione) che interagiscono con la dimensione romantica. In tutti questi casi è ancora possibile studiare la relazione con un modello matematico che ha, però, tre o più equazioni



Laura



Francesco Petrarca

Figura 14: Ritratti di Laura e Francesco Petrarca (Biblioteca Medicea Laurenziana, Firenze).

differenziali. Questi modelli si chiamano *complessi* e sono anch'essi stati proposti e usati per interpretare storie d'amore particolarmente interessanti.

Per esempio, la relazione tra Laura e Francesco Petrarca (vedi Figura 14). descritta nel "Canzoniere" è stata studiata [Rinaldi, 1998a] con un modello a tre equazioni, dove il poeta è rappresentato con due variabili, l'interesse per Laura e l'ispirazione poetica. Si è così potuto scoprire che l'ispirazione poetica può essere un importante fattore destabilizzante capace di rendere turbolenta una storia d'amore altrimenti stazionaria. In Figura 15 sono riportate le oscillazioni dei sentimenti di Laura e Francesco Petrarca previste dal modello durante la loro relazione (21 anni).

È interessante notare che in questo caso è possibile verificare la bontà delle previsioni, un fatto più unico che raro nel contesto della modellistica delle storie d'amore. Infatti, il sentimento di Laura oltre che oscillante è permanentemente negativo, e questa caratteristica è ripetutamente citata nel Canzoniere, come, per esempio, nei seguenti quattro versi della ballata CXLIX

*Di tempo in tempo mi si fa men dura
l'angelica figura e'l dolce riso,
et l'aria del bel viso
e degli occhi leggiadri men oscura.*

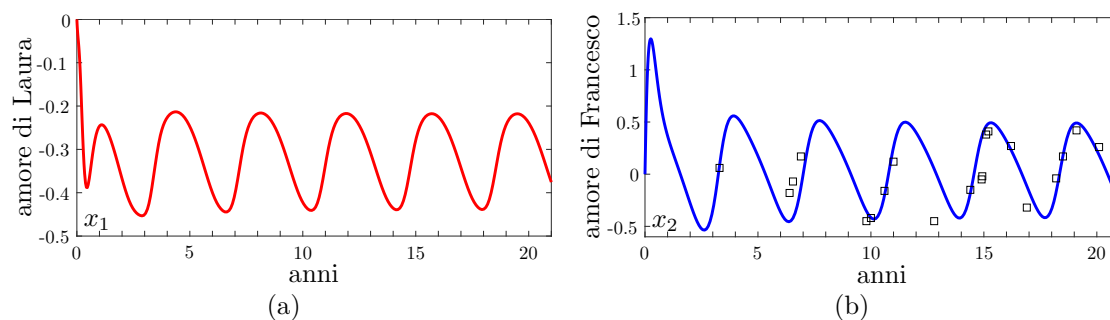


Figura 15: Coinvolgimenti di Laura (a) e Francesco Petrarca (b) previsti dal modello durante i 21 anni della loro relazione.

Le oscillazioni del sentimento di Petrarca sono convalidabili addirittura quantitativamente sfruttando le stime ricavate da Jones [1995] attraverso una accurata analisi lirica del Canzoniere. I punti riportati in Figura 15b sono le stime proposte da Jones per i 23 componimenti datati del Canzoniere e sono tutti (tranne uno) molto vicini alla curva prevista dal modello: una validazione di qualità paragonabile a quelle tipiche della fisica e dell'ingegneria. È anche di interesse citare che la scoperta degli alti e bassi di Figura 15 ha permesso di supportare l'idea (congetturata da storici e letterati) che Petrarca sia stato il principale responsabile della grandiosa transizione da Medioevo a Umanesimo [Rinaldi e altri, 2016].

Un caso interessante perché molto frequente è quello delle coppie soggette a stress ambientali varianti nel tempo. Questo caso è stato studiato in astratto in Rinaldi e altri [2016], ma non è ancora stato approfondito su coppie specifiche. Studiando un modello generale si scopre che se gli stress sono poco variabili la dinamica dei sentimenti replica quella degli stress: per esempio, piccole variazioni periodiche dei parametri individuali

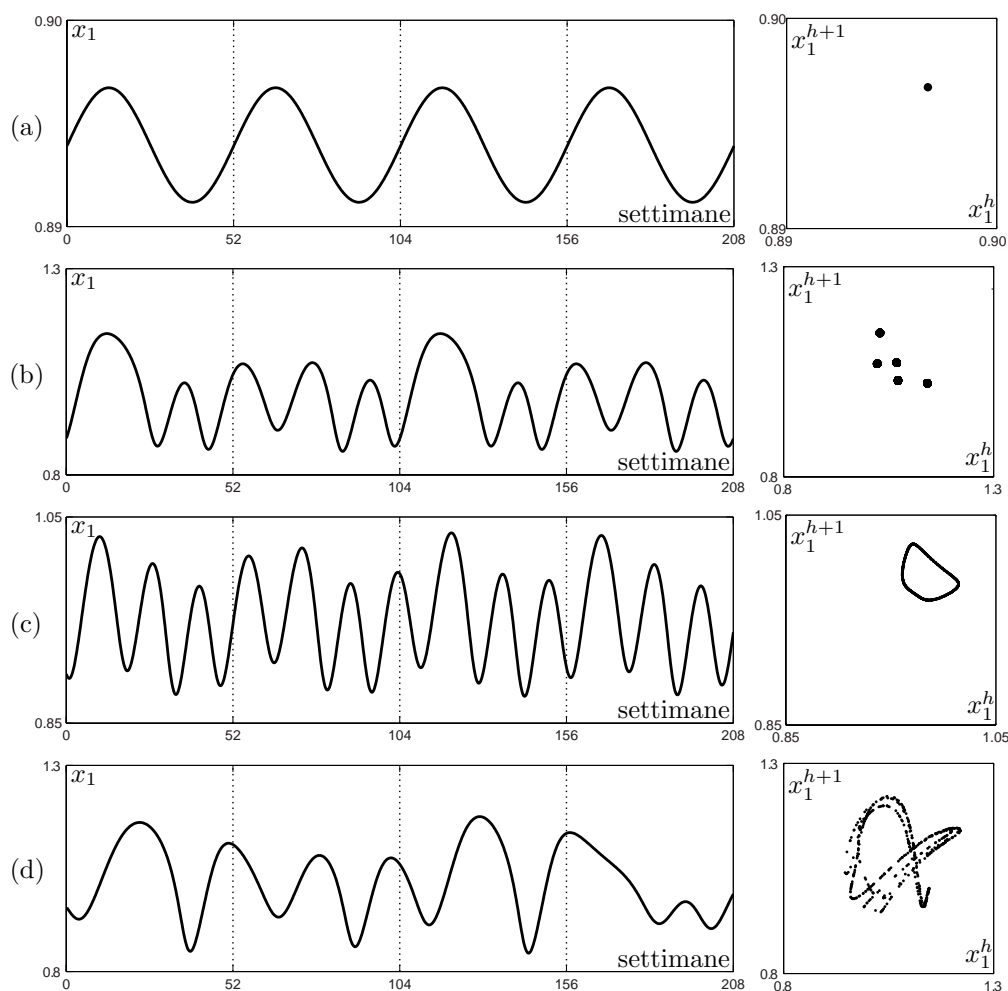


Figura 16: Regimi sentimentali dell'amore di lei ottenuti per simulazione del modello (7) con fascino di lei variante sinusoidalmente come $A_1 = \bar{A}_1 (1 + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{52} t)$ e corrispondenti diagrammi picco-picco a destra: (a) regime periodico con un picco all'anno; (b) regime periodico con 5 picchi ogni 2 anni; (c) regime quasi-periodico; (d) regime caotico.

dovute alla ripetitività delle vacanze estive inducono una periodicità annuale nei sentimenti di lei e di lui, come mostrato in Figura 16a. Ma se la variabilità degli stress è più marcata, la coppia può diventare più complessa di un semplice replicatore. Per esempio, il regime sentimentale pur rimanendo periodico, può diventare alquanto articolato come in Figura 16b, dove si anno 5 picchi di coinvolgimento ogni due anni, o come in Figura 16c e 16d dove il regime è addirittura *quasi-periodico* o *caotico*.

Un'analisi sistematica delle biforcazioni del modello e il calcolo degli *esponenti di Lyapunov* [Strogatz, 1994] porta in generale a diagrammi del tipo di quello di Figura 17 in cui sono riconoscibili zone a funzionamento quasi-periodico e caotico, nonché le famose *lingue di Arnold* [Kuznetsov, 2004] dove il regime sentimentale è periodico. Studiando a fondo questi diagrammi si può mostrare che il caos, che potremmo chiamare *caos sentimentale*, emerge facilmente se la frequenza degli stress è simile a quella dei sentimenti (in assenza di stress). Questa proprietà ne ricorda una analoga scoperta qualche anno fa [Colombo e altri, 2008] per gli ecosistemi: la variabilità ambientale richiesta per generare caos biologico è minore se l'orologio ambientale batte a una frequenza simile a quella dell'ecosistema.

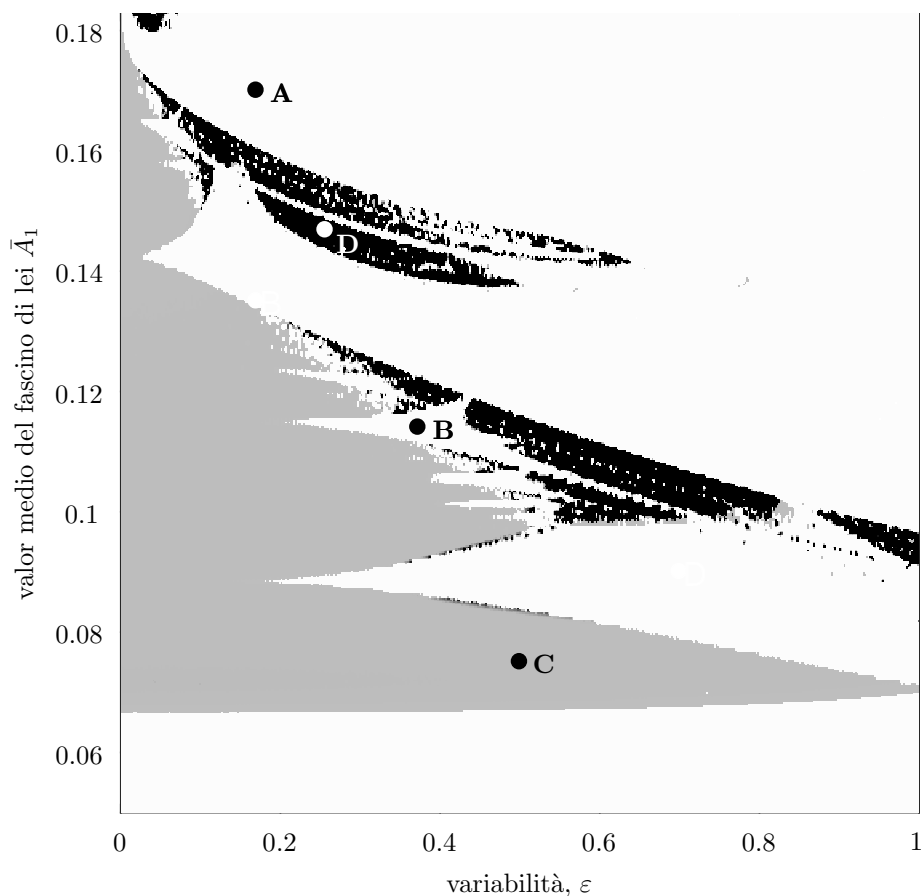


Figura 17: Diagramma di biforcazione del modello (7) con fascino di lei variante sinusoidalmente. I punti A, B, C, D corrispondono alle serie temporali (a), (b), (c), (d) di Figura 16. Le regioni con regime sentimentale periodico, quasi-periodico e caotico sono rispettivamente in bianco, grigio e nero.

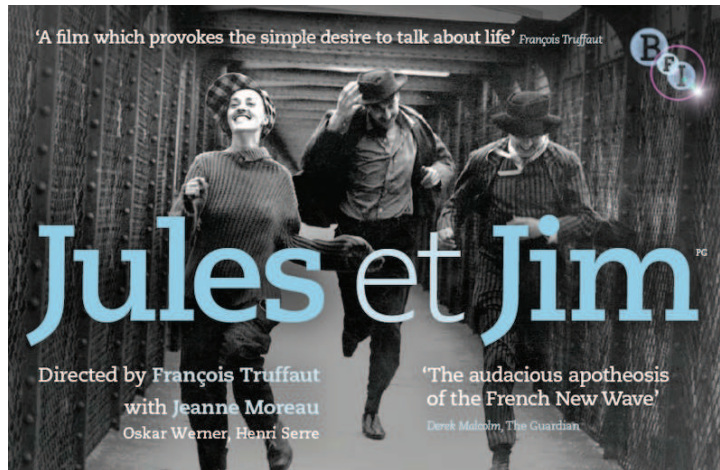


Figura 18: Locandina del film *Jules et Jim* di François Truffaut (1962).

Infine, sono state considerate anche relazioni triangolari, cioè gli effetti generati su due individui dalla comparsa di un terzo che interferisce con almeno uno di loro generando conflitti e gelosie. In questi casi si mostra per mezzo del modello che le dinamiche sentimentali possono essere alquanto complesse, fino a diventare addirittura caotiche, quindi, imprevedibili. Quando ciò accade, la vita di coppia diventa alla lunga insostenibile perché il futuro, con i suoi possibili dolorosi momenti di crisi, rimane permanentemente minaccioso. Il modello spiega quindi perché in molti casi la relazione venga interrotta, a volte anche tragicamente, come nel famoso film di François Truffaut *Jules et Jim* (vedi Figura 18) in cui il suicidio di Kathe viene vissuto come una vera e propria liberazione [Dercole e Rinaldi, 2014].

Riferimenti bibliografici

- Ahmad W. M.; El-Khazali R. (2007). Fractional-order dynamical models of love. *Chaos, Solitons & Fractals*, **33**(4), 1367–1375.
- Bagarello F. (2011). Damping in quantum love affairs. *Physica A*, **390**, 2803–2811.
- Bagarello F. (2012). *Quantum Dynamics for Classical Systems: With Applications of the Number Operator*. John Wiley & Sons.
- Bagarello F.; Oliveri F. (2010). An operator-like description of love affairs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **70**, 3235–3251.
- Bartholomew K.; Horowitz L. M. (1991). Attachment styles among young adults: a test of a four-category model. *Journal of Personality and Social Psychology*, **61**, 226–244.
- Bellomo N.; Carbonaro B. (2006). On the modelling of complex sociopsychological systems with some reasoning about Kate, Jules, and Jim. *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, **2006**, 1–26.

- Bellomo N.; Carbonaro B. (2008). On the complexity of multiple interactions with additional reasoning about Kate, Jules, and Jim. *Mathematical and Computer Modelling*, **47**, 168–177.
- Bielczyk N.; Bodnar M.; Foryś U. (2012). Delay can stabilize: Love affairs dynamics. *Applied Mathematics and Computation*, **219**(8), 3923–3937.
- Bowlby J. (1969). *Attachment and Loss: Vol. 1. Attachment*. New York: Basic Books. 2nd ed.
- Carbonaro B.; Giordano C. (2005). A second step towards a stochastic mathematical description of human feelings. *Mathematical and Computer Modelling*, **41**, 587–614.
- Carbonaro B.; Serra N. (2002). Towards mathematical models in psychology: A stochastic description of human feelings. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **10**, 1453–1490.
- Colombo A.; Dercole F.; Rinaldi S. (2008). Remarks on metacommunity synchronization with application to prey-predator systems. *The American Naturalist*, **171**, 430–442.
- Dercole F.; Rinaldi S. (2014). Love stories can be unpredictable: Jules et Jim in the vortex of life. *Chaos*, **24**, 023134–1–6.
- Feichtinger G.; Jorgensen S.; Novak A. J. (1999). Petrarch’s Canzoniere: Rational addiction and amorous cycles. *Journal of Mathematical Sociology*, **23**, 225–240.
- Felmlee D. H.; Greenberg D. F. (1999). A dynamic systems model of dyadic interaction. *Journal of Mathematical Sociology*, **23**(3), 155–180.
- Gladwell M. (2000). *The Tipping Point—How Small Things Can Make a Big Difference*. New York: Little Brown.
- Goudon T.; Lafitte P. (2015). The lovebirds problem: why solve hamilton-jacobi-bellman equations matters in love affairs. *Acta Applicandae Mathematicae*, **136**(1), 147–165.
- Gragani A.; Rinaldi S.; Feichtinger G. (1997). Cyclic dynamics in romantic relationships. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**, 2611–2619.
- Griffin D. W.; Bartholomew K. (1994). Model of the self and other. fundamental dimensions underlying measures of adult attachment. *Journal of Personality and Social Psychology*, **67**, 430–445.
- Hartl R. F.; Mehlmann A. (1984). Optimal seducing policies for dynamic continuous lovers under risk of being killed by a rival. *Cybernetics and Systems: An International Journal*, **15**, 119–126.
- Hatfield E.; Sprecher S. (1986). Measuring passionate love in intimate relationships. *Journal of Adolescence*, **9**, 383–410.
- Jones F. J. (1995). *The Structure of Petrarch’s Canzoniere: A Chronological, Psychological and Stylistic Analysis*. Brewer, Cambridge, UK.

- Jørgensen S. (1992). The dynamics of extramarital affairs In *Dynamic Economic Models and Optimal Control*. A cura di Feichtinger G., pp. 239–267. Elsevier Science.
- Koca I. (2014). Mathematical modeling of nuclear family and stability analysis. *Applied Mathematical Sciences*, **8**(68), 3385–3392.
- Koca I.; Ozalp N. (2013). Analysis of a fractional-order couple model with acceleration in feelings. *The Scientific World Journal*, **2013**, 730736–1–6.
- Kuznetsov Yu. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edizione.
- Levinger G. (1980). Toward the analysis of close relationships. *Journal of Experimental Social Psychology*, **16**, 510–544.
- Liu W.; Chen K. (2015). Chaotic behavior in a new fractional-order love triangle system with competition. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **5**(1), 103–113.
- McDill J. M.; Felsager B. (1994). The lighter side of differential equations. *The College Mathematics Journal*, **25**, 448–452.
- Patro S. K. (2016). On a model of love dynamics: A neutrosophic analysis In *New Trends in Neutrosophic Theory and Applications*. A cura di Smarandache F., Pramanik S., pp. 279–287. Pons Editors.
- Prior E. (2014). *Relationship Test, Stay or Go, Yes or No: Uncover the Answer in 90 Minutes*. Ed. Ben Prior. [Kindle edition].
- Radzicki M. J. (1993). Dyadic processes, tempestuous relationships, and system dynamics. *System Dynamics Review*, **9**, 79–94.
- Rey J.-M. (2010). A mathematical model of sentimental dynamics accounting for marital dissolution. *PLoS ONE*, **5**(3), e9881–1–8.
- Rey J.-M. (2013). Sentimental equilibria with optimal control. *Mathematical and Computer Modelling*, **57**, 1965–1969.
- Rinaldi S. (1998a). Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **58**, 1205–1221.
- Rinaldi S. (1998b). Love dynamics: The case of linear couples. *Applied Mathematics and Computation*, **95**, 181–192.
- Rinaldi S.; Gragnani A. (1998a). Love dynamics between secure individuals: A modelling approach. *Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences*, **2**, 283–301.
- Rinaldi S.; Gragnani A. (1998b). Minimal models for dyadic processes: A review. *The Complex Matters of the Mind, ISBN, 1220298804*, 87–104.
- Rinaldi S.; Della Rossa F.; Dercole F. (2010). Love and appeal in standard couples. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **20**, 2443–2451.

- Rinaldi S.; Della Rossa F.; Landi P. (2013a). A mathematical model of “Gone with the Wind”. *Physica A*, **392**, 3231–3239.
- Rinaldi S.; Landi P.; Della Rossa F. (2013b). Small discoveries can have great consequences in love affairs: The case of Beauty and The Beast. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, 1330038–1–8.
- Rinaldi S.; Della Rossa F.; Landi P. (2014). A mathematical model of “Pride and Prejudice”. *Nonlinear Dynamics in Psychology and Life Sciences*, **18**, 199–211.
- Rinaldi S.; Landi P.; Della Rossa F. (2015). Temporary bluffing can be rewarding in social systems: The case of romantic relationships. *Journal of Mathematical Sociology*, **39**, 203–220.
- Rinaldi S.; Della Rossa F.; Dercole F.; Gragnani A.; Landi P. (2016). *Modeling Love Dynamics*, volume 89. World Scientific.
- Scheffer M. (2009). *Critical Transitions in Nature and Society*. Princeton University Press.
- Simpson J. A.; Lerma M.; Gangestad S. W. (1990). Perception of physical attractiveness: mechanisms involved in the maintenance of romantic relationships. *Journal of Personality and Social Psychology*, **59**(6), 1192–1201.
- Song L.; Xu S.; Yang J. (2010). Dynamical models of happiness with fractional order. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**(3), 616–628.
- Sprecher S.; Metts S. (1986). Development of the ‘romantic beliefs scale’ and examination of the effects of gender and gender-role orientation. *Journal of Social and Personal Relationships*, **6**, 387–411.
- Strogatz S. H. (1988). Love affairs and differential equations. *Mathematics Magazine*, **61**, 35.
- Strogatz S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press.
- van Nes E. H.; Arani B. M.; Staal A.; van der Bolt B.; Flores B. M.; Bathiany S.; Scheffer M. (2016). What do you mean, “Tipping Point”? *Trends in Ecology & Evolution*, **31**(12), 902–904.
- Zhao Q.; Guan J. (2013). Love dynamics between science and technology: some evidences in nanoscience and nanotechnology. *Scientometrics*, **94**(1), 113–132.