

УДК 517.977.5, 519.86

## Замена Берну́лли в модели Рэмзи: оптимальные траектории при ограничениях на управление \*

*А. А. Красовский<sup>1</sup>, П. Д. Лебедев<sup>2</sup>, А. М. Тарасьев<sup>3</sup>.*

1. Международный институт прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия.  
Шлоссплатц 1, А-2361, Ласенбург, Австрия.

канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, e-mail: krasov@iiasa.ac.at

2. Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, 620990,  
г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16.

канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, e-mail: pleb@yandex.ru

3. Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, 620990,  
г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16.

Уральский федеральный университет, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19,

д-р. физ.-мат. наук, зав. отделом, e-mail: tam@imm.uran.ru

Рассматривается модель неоклассического (экономического) роста. Нелинейное уравнение Рэмзи, моделирующее динамику капитала, в случае производственной функции Кобба-Дугласа сводится к линейному дифференциальному уравнению заменой Бернулли. Это облегчает поиск решения в задаче оптимального роста с логарифмическими предпочтениями. Исследование посвящено решению соответствующей задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом времени. Рассматривается векторное поле гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина с учетом ограни-

---

\*Постановка задачи и методы решения в части конструкций динамической оптимизации предложены А.М. Тарасьевым при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-18-00574). Анализ гамильтоновых систем и разработка алгоритмов построения оптимальных траекторий в рамках принципа максимума Понтрягина выполнены А.А. Красовским. Разработка программного комплекса и численное моделирование проведены П.Д. Лебедевым при поддержке гранта РФФИ №16-31-00356-мол\_а. А.А. Красовский благодарит С.М. Асеева и М. Оберштайнера за ценные замечания, а также носителей языка А. Данвуди (Ирландия) и М. Кантэла (США) за помощь в корректной передаче английских терминов на русский язык.

чений на управление. Доказано существование двух альтернативных установившихся состояний в зависимости от ограничений. Предложенный алгоритм построения траекторий роста сочетает в себе методы программного управления и регулирования по принципу обратной связи. Для некоторых значений ограничений и начальных условий оптимальное решение получено в замкнутой форме. Продемонстрировано влияние технологического изменения на динамику экономического равновесия. Результаты подтверждены компьютерными вычислениями.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, задача оптимального роста, принцип максимума Понтрягина, установившиеся состояния.

Bernoulli substitution in the Ramsey model: optimal trajectories under control constraints

Abstract: We consider a neoclassical (economic) growth model. A nonlinear Ramsey equation, modeling capital dynamics, in the case of Cobb-Douglas production function is reduced to the linear differential equation via a Bernoulli substitution. This considerably facilitates the search for a solution to the optimal growth problem with logarithmic preferences. The study deals with solving the corresponding infinite horizon optimal control problem. We consider a vector field of the Hamiltonian system in the Pontryagin maximum principle, taking into account the control constraints. We prove the existence of two alternative steady-states, depending on the constraints. A proposed algorithm for constructing growth trajectories combines methods of open-loop control and closed-loop regulatory control. For some levels of constraints and initial conditions, a closed-form solution is obtained. We also demonstrate the impact of technological change on the economic equilibrium dynamics. Results are supported by computer calculations.

*Keywords:* mathematical modeling, optimal growth problem, Pontryagin's maximum principle, steady-states

## Введение

Предложенное Фрэнком Рэмзи<sup>†</sup> [1] обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее динамику капитала, входит в ведущие учебники по теории экономического роста и благосостояния [2, 3]. В работе рассматривается *модель неоклассического роста*, опирающаяся на *уравнение Рэмзи*, и поэтому, также известная как *модель Рэмзи*<sup>‡</sup>. Формализованная в модели *задача оптимального роста* служит фундаментом для многих прикладных экономических и смежных исследований. В качестве оптимизационного функционала в задаче рассматривается индекс потребления, дисконтированный на бесконечном интервале времени. Это создает особенность в задаче оптимального управления [4], что в свою очередь стимулирует многие современные исследования, связанные с новыми формулировками *принципа максимума Понтрягина* [5] для класса задач с бесконечным горизонтом [6]. В основном эти работы посвящены характеристике сопряженной переменной в необходимых условиях оптимальности и *условиями трансверсальности* [7]. Отметим, что в прикладных исследованиях важным является вопрос устойчивости решений. При этом в задачах оптимальной стабилизации бесконечный временной интервал рассматривается в стандартных постановках [8]. Важно подчеркнуть, что конструкции решения задач управления на бесконечном горизонте развиваются в последнее время и для систем с распределенными параметрами (см., напр., [9]). В работе предлагается алгоритм построения траекторий, сочетающий в себе оптимальное управление и стабилизирующее воздействие.

Вторая особенность рассматриваемой задачи заключается в нелинейности уравнения Рэмзи (см., напр., [10]). В общем случае это действительно так, но в классической постановке, восходящей к *модели Солоу* [11], нелинейное уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению *заменой Бернулли*. Эта замена рассматривалась в некоторых работах для специальных случаев и в разрезе экономической теории (см., напр., [12]). Здесь мы рассмотрим постановку в традиции теории оптимального управления [13, 14], добавив существенное ограничение на управление. В статье дается характеристика *векторного поля* гамильтоновой системы для допустимых режи-

---

<sup>†</sup>Передача имени и фамилии на русский язык выполнены с опорой на правила транскрипции и фактическое произношение. В источниках иногда встречаются искаженные написания, например, Рамсей.

<sup>‡</sup>см., напр., [2, разд. 8.13].

мов управления. Она выявляет установившиеся состояния, в которых выполняются необходимые условия оптимальности, и определяет поведение сопряженной переменной в принципе максимума Понтрягина. В том числе выявлено дополнительное установившееся состояние, которое, как правило, не рассматривается в моделях. Тем не менее, показано, что оно вполне отвечает экономическим предпосылкам. В предложенной формулировке модель позволяет учитывать экзогенную динамику технологического развития. В работе рассматривается два случая: экспоненциальный и логистический технологический рост. Предложенный подход не исключает возможности внедрения дополнительных нестационарных процессов в модель. Аналитические результаты подтверждаются численными экспериментами по построению модельных траекторий.

## 1 Модель оптимального управления

Рассмотрим *задачу оптимального роста* [2] с функцией Кобба-Дугласа, технологическим изменением и логарифмическими предпочтениями, т.е. ту же задачу, что и в работе [14], но с учетом экзогенной динамики технологического роста. В этом разделе она будет сведена к задаче управления с линейной динамикой и нелинейным функционалом. Рассмотрим *уравнение Рэмзи*:

$$\dot{K} = sY - \mu K, \quad (1)$$

где  $K$  — капитал,  $Y$  — производство или ВВП,  $\mu > 0$  — постоянный коэффициент амортизации капитала,  $s$  — доля производства, которая сберегается и инвестируется в рост капитала, т.е.  $s \in [0, g]$ ,  $0 < g < 1$ , где  $g$  — заданная граница инвестиций. Предполагается, что инвестиционный процесс, подчиненный динамике (1), начинается в момент времени  $t_0$  со стартового капитала  $K(t_0) = K^0 > 0$ .

Производство в каждый момент времени  $t \geq 0$  зависит от производственных факторов. Эта зависимость задана формулой:

$$Y(t) = A(t)F[K(t), L(t)], \quad (2)$$

где  $F$  — производственная функция,  $L > 0$  — рабочая сила (труд),  $A > 0$  — экзогенный фактор технологического развития [11]. Здесь будем рассматривать распространенную в экономике производственную *функцию Кобба-Дугласа*, которая определяется выражением:

$$F[K, L] = K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3)$$

Постоянная  $\alpha$  обозначает эластичность капитала.

Далее будем следовать стандартному предположению об экспоненциальном росте рабочей силы:

$$\dot{L} = nL, \quad L(t_0) = L^0 \quad (4)$$

с постоянным темпом  $n \geq 0$ . Здесь  $L^0 > 0$  начальный уровень трудовых ресурсов. Это позволяет перейти к переменным в расчете на одного рабочего:  $y = Y/L > 0$ ,  $k = K/L > 0$ . Принимая во внимание (1), (4), динамика капитала на одного рабочего задается уравнением:

$$\dot{k} = sy(k) - \lambda k, \quad k(t_0) = k^0 = K^0/L^0, \quad (5)$$

где  $\lambda = \mu + n$ ,  $s$  — инвестиции (управление), а  $y$  определяется производственной функцией вида:

$$y = f(k) = Ak^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (6)$$

## 1.1 Замена Бернулли в уравнении Рэмзи

Поделим уравнение Рэмзи (5) на  $y > 0$ :

$$\frac{\dot{k}}{y} = s - \lambda \frac{k}{y}, \quad (7)$$

и введем в модель новую переменную:

$$x(t) = \frac{k(t)}{y(t)}. \quad (8)$$

Производная от  $x$  по времени  $t$  вычисляется по правилу:

$$\dot{x} = \left( \frac{k}{y} \right)' = \frac{\dot{k}y - y\dot{k}}{y^2}. \quad (9)$$

Вычислим производную  $\dot{y}$  с учетом (6):

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial k} \dot{k} + \frac{\partial y}{\partial A} \dot{A} = \alpha Ak^{\alpha-1} \dot{k} + k^\alpha \dot{A} = \alpha \frac{y}{k} \dot{k} + \frac{y}{A} \dot{A}, \quad (10)$$

и подставим (10) в (9):

$$\dot{x} = \frac{\dot{k}}{y} - \alpha \frac{yk}{ky^2} \dot{k} - \frac{yk}{Ay^2} \dot{A} = (1 - \alpha) \frac{\dot{k}}{y} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{k}{y}. \quad (11)$$

Из соотношений (7) и (11) следует, что в новой переменной  $x$  (8) уравнение Рэмзи (5) становится линейным:

$$\dot{x} = (1 - \alpha)(s - \lambda x) - \frac{\dot{A}}{A} x. \quad (12)$$

Обозначив управление  $u(t) = s(t)$ , представим уравнение (12) в линейном виде:

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (13)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  вычисляются по формулам:

$$a(t) = -(1 - \alpha)\lambda - \frac{\dot{A}}{A}, \quad b = (1 - \alpha) > 0. \quad (14)$$

Стоит отметить, что в рассматриваемой модели уравнение (5) является частным случаем уравнения Бернулли. Таким образом, замена (8) является *заменой Бернулли*<sup>§</sup>. С экономической точки зрения переменная  $x$  (8) характеризует интенсивность капитала.

## 1.2 Функционал полезности в новых переменных

В модели экономического роста полезность является функцией от потребления,  $C$ , которое вычисляется по формуле:

$$C(t) = (1 - s(t))y(k, t). \quad (15)$$

Это означает, что та часть выпуска, которая не инвестируется в рост капитала, потребляется. Будем рассматривать логарифмическую полезность  $U(C)$ :

$$U(C(t)) = \ln C(t) = \ln (y(k, t)(1 - s(t))) = \ln y(k, t) + \ln(1 - s(t)). \quad (16)$$

При переходе к переменной  $x$  (8) выявляется следующее соотношение:

$$\ln y(k, t) = \frac{1}{(1 - \alpha)} (\ln A(t) + \alpha \ln x(t)), \quad (17)$$

которое проверяется подстановкой с учетом (6).

Подставив (17) в (16), получаем выражение для функции полезности:

$$U(C(t)) = \beta(t) + \gamma \ln x(t) + \ln(1 - s(t)), \quad \beta(t) = \frac{\ln A(t)}{(1 - \alpha)}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)}. \quad (18)$$

В задаче динамической оптимизации инвестиций требуется максимизировать дисконтированный индекс потребления на бесконечном горизонте времени:

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} U(C(t))e^{-\delta t} dt, \quad (19)$$

---

<sup>§</sup>Уравнение названо в честь Якоба Бернулли, а замена, сводящая уравнение к линейному, была найдена его братом Иоганном Бернулли.

где  $\delta > 0$  — коэффициент дисконтирования.

**З а м е ч а н и е 1.** В экономике задача с функционалом (19) называется *задачей оптимального роста*. Бесконечный горизонт является стандартной абстракцией, отвечающей концепции экономического роста. Например, одной интерпретацией является представление функционала, как ожидаемой полезности (см., напр., [2, разд. 5.3]). В этом случае, логарифмическая функция (16) служит моделью рискованных предпочтений. Она относится к типу функций полезности с постоянной относительной несклонностью к риску (CRRA) и убывающей абсолютной несклонностью к риску (DARA) — свойства в некоторой степени подтверждающиеся эмпирическими исследованиями (см., напр., [15]). Добавим, что параметр дисконтирования в такой интерпретации приблизительно оценивает временной интервал планирования.

### 1.3 Задача оптимального управления

Рассмотрим случай, когда экзогенная динамика технологического роста задана, следуя *модели Солоу*, линейным уравнением:

$$\dot{A} = rA, \quad A(t_0) = A^0. \quad (20)$$

Здесь  $r \geq 0$  — постоянный темп роста,  $A^0 > 0$  — начальный уровень технологии. В этом случае коэффициент  $a$  (14) является постоянным:

$$a(t) = a = -(1 - \alpha)\lambda - r < 0. \quad (21)$$

Также видим, что экзогенный рост  $A(t)$ , входящий в параметр  $\beta(t)$  (в формуле (18)) не участвует в оптимизации. Поэтому ниже будет рассматриваться следующая задача оптимального управления.

**Задача 1.** Управляемый объект  $x$  начинает движение из начального положения  $x(t_0) = x_0$ . Его состояние описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x > 0, \quad (22)$$

где  $a < 0$ ,  $b > 0$  и  $0 < g < 1$  — заданные постоянные. Требуется среди допустимых управлений  $u \in [0, g]$  найти оптимальное управление  $u^0$  которое максимизирует функционал:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{+\infty} (\gamma \ln x(t) + \ln(1 - u(t))) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max, \quad (23)$$

где  $\gamma > 0$  и  $\delta > 0$  — заданные числа.

## 2 Анализ векторного поля гамильтоновой системы

Современные результаты теории оптимального управления [6] применимы к рассматриваемой задаче. Во избежание повторений, отметим здесь, что задача 1 имеет решение, которое можно найти используя необходимые и достаточные условия принципа максимума [7, 14]. Далее сконцентрируемся на геометрическом анализе поведения траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям принципа максимума Понтрягина. Это будет выполнено путем построения векторного поля гамильтоновой системы для допустимых режимов управления.

Под *векторным полем* будем понимать векторное поле скоростей переменной  $x$  и сопряженной переменной  $\psi$ . Введя стандартные замены, исключающие фактор дисконтирования  $\delta$  [16], запишем гамильтониан в принципе максимума (в нормальной форме  $\psi_0 = 1$ ):

$$H(x, \psi, u, t) = \gamma \ln x + \ln(1 - u) + \psi(ax + bu). \quad (24)$$

Максимум гамильтониана по  $u$ , определяемый уравнением:

$$\frac{-1}{1 - u} + \psi b = 0, \quad (25)$$

доставляется управлением:

$$u^0 = 1 - \frac{1}{b\psi}. \quad (26)$$

В силу вогнутости гамильтониана по переменной  $u$ , определим максимизирующее управление с учетом ограничений  $u \in [0, g]$  и формулы (26):

$$u^0 = 0, \quad \text{если } \frac{1}{\psi} > b \quad (27)$$

и

$$u^0 = g, \quad \text{если } \frac{1}{\psi} < b(1 - g). \quad (28)$$



## 2.1 Области определения гамильтоновой системы

Наш анализ исчерпывается положительным октантом  $(x, \psi)$ . В нем ограничения на управления разбивают векторное поле на три области:

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, \psi): 0 < \psi \leq 1/b, x > 0\}, \quad (29)$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, \psi): 1/b \leq \psi \leq \frac{1}{b(1-g)}, x > 0\}, \quad (30)$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(x, \psi): \psi \geq \frac{1}{b(1-g)}, x > 0\}. \quad (31)$$

Как видим, замена Бернулли значительно упрощает вид линий переключения — они стали прямыми, параллельными оси  $x$  (ср. [14]). Максимизирующее гамильтониан управление в этих областях имеет вид:

$$u^0(x, \psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, \psi) \in \mathcal{D}_1, \\ 1 - \frac{1}{b\psi}, & \text{если } (x, \psi) \in \mathcal{D}_2, \\ g, & \text{если } (x, \psi) \in \mathcal{D}_3. \end{cases} \quad (32)$$

Управление (32) зависит только от  $\psi$ , но не зависит от  $x$ . Это означает, что производная гамильтониана  $H$  (24) по  $x$  задается одинаково во всех областях определения. Следовательно имеется следующая динамика сопряженной переменной принципа максимума:

$$\dot{\psi} = \delta\psi - \frac{\partial H}{\partial x} = (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}, \quad (33)$$

во всех областях  $\mathcal{D}_i, i = 1, 2, 3$ .

Знак скорости сопряженной переменной  $\psi$  (33) определяется кривой:

$$\Psi(x) = \frac{\gamma}{(\delta - a)x}. \quad (34)$$

Учитывая  $a < 0, \gamma > 0, \delta > 0$ , получаем, что  $\Psi(x)$  монотонно убывает с ростом  $x, x > 0$ . Знак производной  $\dot{\psi}$  определяется по правилу:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &< 0 & \text{при } \psi(x) < \Psi(x), \\ \dot{\psi} &= 0 & \text{при } \psi(x) = \Psi(x), \\ \dot{\psi} &> 0 & \text{при } \psi(x) > \Psi(x). \end{aligned} \quad (35)$$

Правило (35) частично характеризует векторное поле гамильтоновой системы. В подобных задачах, анализ векторного поля является эффективным методом (см., напр., [7]). Существенным

фактором этого анализа является то, что оптимальная траектория  $(x^0, \psi^0)$  должна удовлетворять следующему *условию трансверсальности* на бесконечности [7]:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x^0(t)\psi^0(t)e^{-\delta t} = 0. \quad (36)$$

Ниже будем рассматривать *гамильтонову систему*:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + bu^0, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{cases} \quad (37)$$

для различных режимов управления  $u^0$  (32). При этом будем интересоваться направлением скоростей переменной  $x$  в каждой из областей (29)–(31).

## 2.2 Гамильтонова система в области нулевого управления $\mathcal{D}_1$

В области  $\mathcal{D}_1$  (29) гамильтонова система (37) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{cases} \quad (38)$$

В положительной полуоси  $x > 0$  правая часть уравнения для  $\dot{x}$  отрицательна. Следовательно в области  $\mathcal{D}_1$ :

$$\dot{x} < 0. \quad (39)$$

## 2.3 Гамильтонова система в области установившегося состояния $\mathcal{D}_2$

Гамильтонова система (37) в области  $\mathcal{D}_2$  (30) представляется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + b - \frac{1}{\psi}, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{cases} \quad (40)$$

Кривая, на которой  $\dot{x} = 0$ , определяется функцией:

$$X(\psi) = \frac{1 - b\psi}{a\psi}, \quad \psi \in \mathcal{D}_2. \quad (41)$$

В области  $\mathcal{D}_2$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 \quad \text{при} \quad x(\psi) < X(\psi), \\ \dot{x} &= 0 \quad \text{при} \quad x(\psi) = X(\psi), \\ \dot{x} &< 0 \quad \text{при} \quad x(\psi) > X(\psi). \end{aligned} \quad (42)$$

## 2.4 Гамильтонова система в области интенсивного управления $\mathcal{D}_3$

В области  $\mathcal{D}_3$  (31) гамильтонова система (37) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + bg, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{cases} \quad (43)$$

Таким образом, в области  $\mathcal{D}_3$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < -gb/a, \\ \dot{x} &= 0 \quad \text{при} \quad x = -gb/a, \\ \dot{x} &< 0 \quad \text{при} \quad x > -gb/a. \end{aligned} \quad (44)$$

## 3 Установившееся состояния в зависимости от ограничений на управление

Условия (35), (39), (42), (44) характеризуют векторное поле гамильтоновой системы с учетом всех режимов управления.

**О п р е д е л е н и е 1.** Установившееся состояния гамильтоновой системы (37) есть решение системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + bu^0(x, \psi) &= 0, \\ (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x} &= 0, \end{cases} \quad (45)$$

где режимы управления  $u^0(x, \psi)$  определены соотношением (32).

Исходя из нашего анализа, видим, что уравнения, входящие в систему (45) выполняются на линиях:  $\Psi$  (34),  $X$  (41) в области  $\mathcal{D}_2$  (29), а также в области  $\mathcal{D}_3$  (31) на следующей линии (см. (44)):

$$Z = \{(x, \psi) \in \mathcal{D}_3: x = -ga/b\}. \quad (46)$$

**Теорема 1.** В зависимости от ограничений на управления  $g \in (0, 1)$  в задаче 1 существует два возможных установившихся состояния гамильтоновой системы (37).

1. Если

$$0 < g \leq \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad (47)$$

то существует единственное установившееся состояние в области интенсивного управления  $\mathcal{D}_3$  (31):

$$x_S^* = -g\frac{b}{a}, \quad \psi_S^* = \frac{-\gamma a}{gb(\delta - a)}. \quad (48)$$

2. Если:

$$g \geq \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad (49)$$

то существует единственное установившееся состояние гамильтоновой системы в области  $\mathcal{D}_2$

(30):

$$x^* = \frac{b\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad \psi^* = \frac{\delta - a - a\gamma}{b(\delta - a)}. \quad (50)$$

Каждое из этих установившихся состояний является точкой покоя седлового типа.

**Доказательство.** Найдем установившееся состояния гамильтоновой системы (37), удовлетворяющие определению 1. Приравняв правые части (40) к нулю, получаем установившееся состояние в области  $\mathcal{D}_2$  (30):

$$x^* = \frac{b\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad \psi^* = \frac{\delta - a - a\gamma}{b(\delta - a)}, \quad (51)$$

геометрически соответствующее единственно-возможному пересечению линий  $X$  (41) и  $\Psi$  (34).

Определение области  $\mathcal{D}_2$  (30) включает в себя параметр  $g \in (0, 1)$ , который определяет ограничения на управление  $u \in [0, g]$ . Для того, чтобы установившееся состояние существовало в области  $\mathcal{D}_2$ , должны выполняться ограничения на сопряженную переменную:

$$\frac{1}{b} \leq \psi^* \leq \frac{1}{b(1-g)}. \quad (52)$$

С учетом  $a < 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ , неравенство слева выполняется автоматически:

$$\psi^* = \frac{\delta - a - a\gamma}{b(\delta - a)} > \frac{\delta - a}{b(\delta - a)} = \frac{1}{b}. \quad (53)$$

Подставив в правое неравенство в (52) выражение для  $\psi^*$  (51), получаем неравенство относительно параметра  $g$ , которое есть в точности (49). При этом управление в установившемся состоянии  $(x^*, \psi^*)$  определяется выражением:

$$u^* = \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad (54)$$

которое удовлетворяет ограничениям  $0 < u^* \leq g$  (см. (49)).

Найдем установившееся состояние (45) гамильтоновой системы (43):

$$x_S^* = -g\frac{b}{a}, \quad \psi_S^* = \frac{-\gamma a}{gb(\delta - a)}. \quad (55)$$

Исходя из анализа, приведенного выше, оно задается возможным пересечением линий  $Z$  (46) и  $\Psi$  (34) в области  $\mathcal{D}_3$  (31). Для того, чтобы пересечение  $(x_S^*, \psi_S^*)$  “попало” в эту область, должно

выполняться следующее условие:

$$\psi_S^* \geq \frac{1}{b(1-g)}. \quad (56)$$

Подставив в (56) выражение (55), приходим к неравенству (47). В точке  $(x_S^*, \psi_S^*)$  управление является граничным  $u_S^* = g$  (32).  $\square$

Заметим, что в случае равенства в (49), (47):

$$g = \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad (57)$$

установившиеся состояния совпадают:  $x^* = x_S^*$ ,  $\psi^* = \psi_S^*$ .

Напомним, что установившегося состояния гамильтоновой системы (37) в области  $\mathcal{D}_1$  (29) не существует (38), (39). Итак, мы доказали единственность двух альтернативных установившихся состояний.

**Седловой характер установившегося состояния в области  $\mathcal{D}_2$ .** Матрица Якоби гамильтоновой системы (40), линеаризованной в окрестности установившегося состояния (51), определяется выражением:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_2}(x^*, \psi^*) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\psi^{*2}} \\ \frac{\gamma}{x^{*2}} & (\delta - a) \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Собственные числа вычисляются по формуле:

$$\xi_{0,\Pi} = 0.5 \left( \delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4a(\delta - a) + \frac{(\delta - a)^2}{\gamma^2}} \right). \quad (59)$$

С учетом  $a < 0$  и  $\delta > 0$ , получаем:

$$\xi_0 < 0, \quad \xi_\Pi > 0. \quad (60)$$

Собственные числа действительные и противоположных знаков, что свидетельствует о седловом типе установившегося состояния  $(x^*, \psi^*)$ . Устойчивым является направление собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу  $\xi_0$  (см. [18]).

**Седловой характер установившегося состояния в области  $\mathcal{D}_3$ .** Матрица Якоби гамильтоновой системы (43), линеаризованной в окрестности установившегося состояния (55), задается

выражением:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_3}(x_S^*, \psi_S^*) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{\gamma a^2}{g^2 b^2} & (\delta - a) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Решение характеристического уравнения определяется формулой:

$$\sigma_{0,\Pi} = 0.5(\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4a(\delta - a)}). \quad (62)$$

Здесь собственные числа также действительные и противоположных знаков:

$$\sigma_0 < 0, \quad \sigma_\Pi > 0, \quad (63)$$

что указывает на седловой характер установившегося состояния  $(x_S^*, \psi_S^*)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Случай 2 с ограничениями (49) стандартно рассматривается в литературе. Например, в [7], где  $g = 1 - \varepsilon$ , авторы предполагают малость параметра  $\varepsilon \rightarrow 0$  (см. [7, с. 138]). В результате этого предположения, они получают единственное установившееся состояние гамильтоновой системы (см. [7, с. 143]). Тем не менее, случай достаточно большого  $\varepsilon$ , т.е. (47), также представляет интерес. Поэтому он будет рассмотрен ниже.

## 4 Построение траекторий экономического роста

Из приведенного выше анализа следует, что существует две качественные картины, изображающие векторное поле гамильтоновой системы. Они связаны с ограничениями на управление  $g$  (49), (47), которое в свою очередь определяет два установившихся состояния седлового типа.

### 4.1 Случай стандартных ограничений на управление.

На Рис. 1 изображен случай векторного поля с установившемся состоянием в области  $\mathcal{D}_2$  (30). Он соответствует ситуации, когда ограничения на управления достаточно велики (49). Такой случай является *стандартным*.

Из рисунка видно, что условие трансверсальности (36) на бесконечности выполняется только в точке покоя  $(x^*, \psi^*)$  (50). Таким образом, для начальных положений  $x(t_0) = x^0$ , требуется найти такое значение  $\psi(t_0) = \psi^0$ , чтобы решение гамильтоновой системы с учетом режимов управления

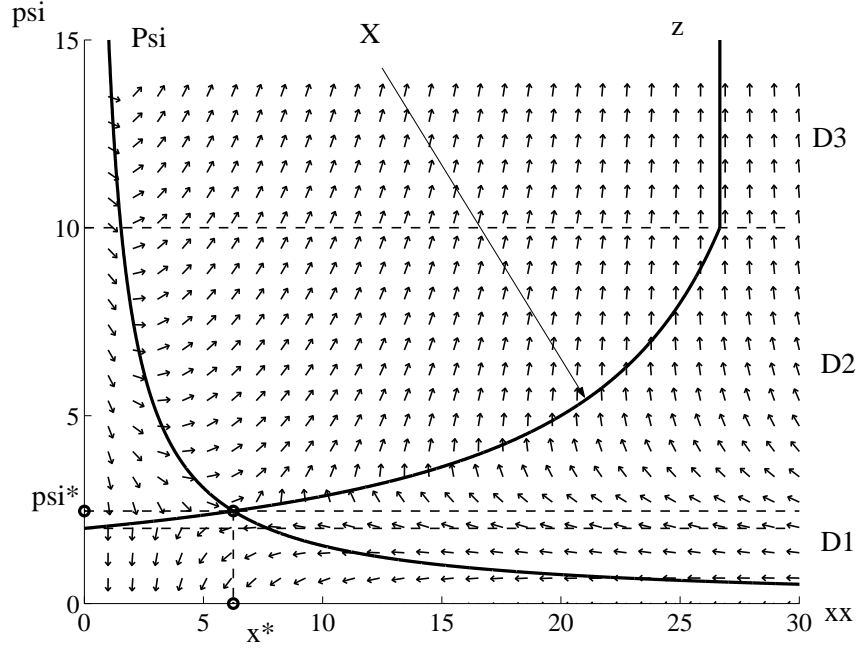


Рис. 1: Векторное поле гамильтоновой системы (37) в случае стандартных ограничений на управление (49). Обозначения жирных линий:  $Z$  (46),  $X$  (41),  $\Psi$  (34). Стрелочки указывают направление вектора  $(\dot{x}, \dot{\psi})$  в точке  $(x, \psi)$ . Установившееся состояние  $(x^*, \psi^*) = (6.25, 2.46)$  (50) принадлежит области  $\mathcal{D}_2$  (30). Векторное поле построено для следующих параметров:  $a = -0.015$ ,  $b = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $g = 0.8$ .

(32). сходилась к установившемуся состоянию на бесконечности. Рис. 1 иллюстрирует возможность сужения диапазона поиска  $\psi^0$ . Используя функцию  $\Psi(x)$  (34), запишем следующее правило выбора диапазона для поиска  $\psi^0$ :

1. если  $x^0 < x^*$ , то  $\psi^* < \psi^0 < \Psi(x^0)$
2. если  $x^0 = x^*$ , то  $\psi^0 = \psi^*$
3. если  $x^0 > x^*$ , то  $\Psi(x^0) < \psi^0 < \psi^*$

Следуя этому правилу, можно найти единственное начальное положение  $(x^0, \psi^0)$ , стартуя из которого траектория будет сходиться к  $(x^*, \psi^*)$ . В связи с тем, что только эта траектория будет удовлетворять условиям трансверсальности (36), она и есть оптимальное решение.

На Рис. 2 построены траектории, полученные для двух значений  $x^0$ : левее и правее  $x^*$ . По правилу, описанному выше, в каждом случае выбрана траектория, которая при интегрировании в прямом

времени гамильтоновой системы (37) за время  $T$  сходится в окрестность установившегося состояния  $(x^*, \psi^*)$  с учетом режимов управления (32). В связи с седловым характером установившегося состояния, найти ту единственную траекторию, которая в идеале (теоретически) попадает прямо в точку покоя, крайне сложно. Таким образом, мы предлагаем строить траекторию, попадающую в окрестность  $(x^*, \psi^*)$  и далее стабилизировать ее до точки равновесия, применяя соответствующий регулятор.

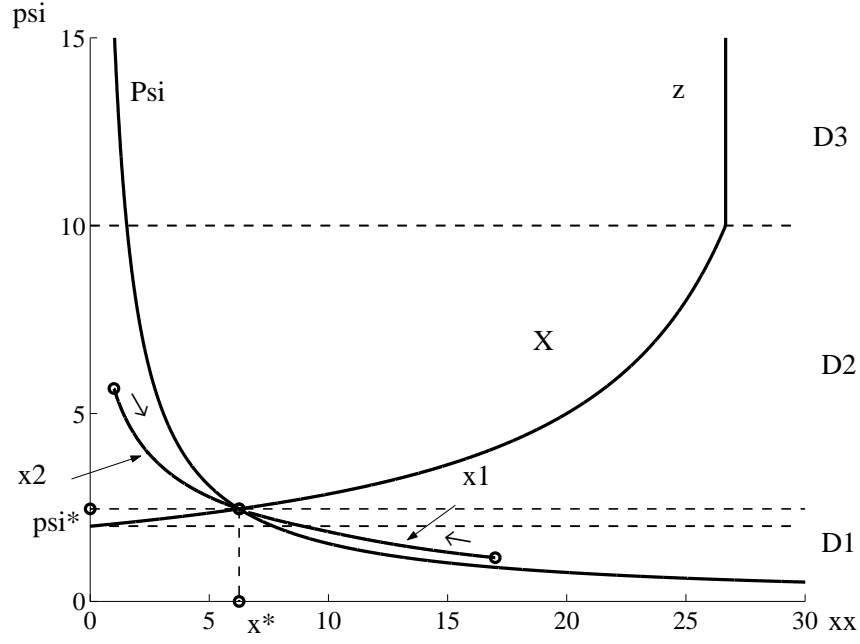


Рис. 2: Траектории  $\Xi_1 = \{(x_1, \psi_1): x_1 = x_1(t), \psi_1 = \psi_1(t), t \in [0, T]\}$  при  $x_1(0) = 1, \psi_1(0) = 5.667$ , и  $\Xi_2 = \{(x_2, \psi_2): x_2 = x_2(t), \psi_2 = \psi_2(t), t \in [0, T]\}$  при  $x_2(0) = 17, \psi_2(0) = 1.162$ . За время  $T = 80$  траектории попадают в окрестность установившегося состояния в области  $\mathcal{D}_2$ :  $x_1(T) = 6.186, \psi_1(T) = 2.49; x_2(T) = 6.638, \psi_2(T) = 2.362$ .

**Регулятор гамильтоновой системы в области  $\mathcal{D}_2$ .** Используя собственное число  $\xi_0$  (59) и вид оптимального управления  $u^0$  (32) можно построить регулятор гамильтоновой системы в области  $\mathcal{D}_2$  по принципу обратной связи:

$$u_{\mathcal{D}_2}^0(x) = 1 - \frac{1}{b(\psi^* + \omega(x - x^*))}, \quad (64)$$

где  $\omega$  определяется наклоном собственного вектора линеаризованной системы, отвечающего  $\xi_0$ :

$$\omega = (\xi_0 - a)\psi^{*2}. \quad (65)$$



Этот регулятор стабилизирует гамильтонову систему в окрестности установившегося состояния  $(x^*, \psi^*)$  (50) в области  $\mathcal{D}_2$  (см., напр., [17]).

Альтернативой этому методу является построение траектории в обратном времени [14, 16] путем аппроксимации начального положения (при интегрировании) в направлении собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу. На Рис. 3 показаны графики траекторий  $x$ , стартующих из разных начальных условий.

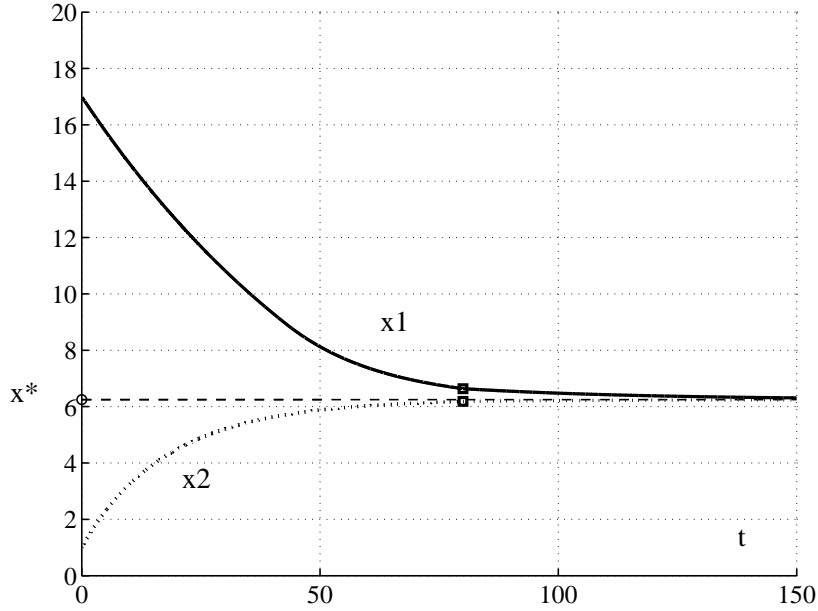


Рис. 3: Графики  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  (см. Рис. 2). За время  $T = 80$  траектории попадают в окрестность установившегося состояния в области  $\mathcal{D}_2$ :  $x_1(T) = 6.186$ ,  $x_2(T) = 6.638$ . Начиная с этого момента их стабилизирует регулятор  $u_{\mathcal{D}_2}^0(x)$  (64).

## 4.2 Случай жестких ограничений на управление

На Рис. 4 построено векторное поле для случая установившегося состояния в области  $\mathcal{D}_3$  (31).

Назовем этот случай, когда ограничения на управление малы, случаем *жестких ограничений* на инвестиции. В этом случае оптимальная траектория должна сходиться в точку покоя  $(x_S^*, \psi_S^*)$ .

Получаем правило для выбора диапазона поиска начального положения  $\psi^0$  в зависимости от  $x^0$ :

1. если  $x^0 < x_S^*$ , то  $\psi_S^* < \psi^0 < \Psi(x^0)$ ,
2. если  $x^0 = x_S^*$ , то  $\psi^0 = \psi_S^*$ ,

3. если  $x^0 > x_S^*$ , то  $\Psi(x^0) < \psi^0 < \psi_S^*$ .

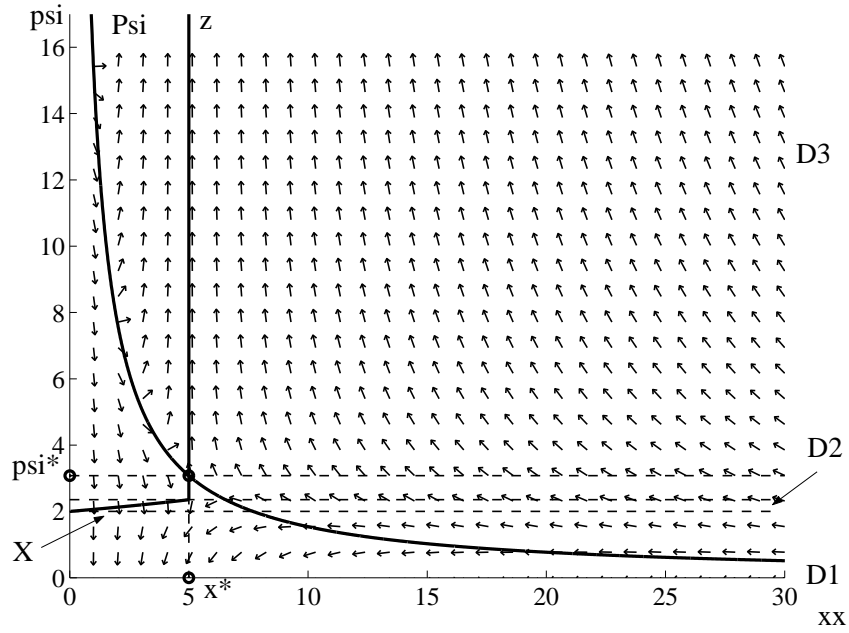


Рис. 4: Векторное поле гамильтоновой системы в случае жестких ограничений  $g = 0.15$ . Обозначения линий:  $Z$  (46),  $X$  (41),  $\Psi$  (34). Установившееся состояние  $x_S^* = 5, \psi_S^* = 3.077$ . Векторное поле построено для следующих параметров:  $a = -0.015, b = 0.5, \gamma = 1, \delta = 0.05$ ,

Любопытным является первый случай  $x^0 < x_S^*$ , так как при этом оптимальная траектория всегда принадлежит области  $\mathcal{D}_3$ . Это в свою очередь означает, что оптимальное управление будет постоянным:  $u^0 = g$ . Таким образом, в этом случае можно записать решение в замкнутой форме, используя формулу Коши [18].

**Регулятор гамильтоновой системы в области  $\mathcal{D}_3$ .** В области  $\mathcal{D}_3$  управление является граничным  $u^0(x) = g$  (32). В этом случае динамику  $x$  можно записать, применив формулу Коши для решения линейного уравнения для  $x$  в (43):

$$x(t) = x^0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t b g e^{a(t-\tau)} d\tau = \left(x^0 + \frac{bg}{a}\right) e^{a(t-t_0)} - \frac{bg}{a}. \quad (66)$$

В силу  $a < 0$  и (48) имеет место соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\frac{bg}{a} = x_S^*. \quad (67)$$

Таким образом, регулятор  $u_{D_3}^0(x) = g$  стабилизирует гамильтонову систему в окрестности установившегося состояния  $(x_S^*, \psi_S^*)$  (48) в области  $\mathcal{D}_3$  (31).

На Рис. 5 изображены оптимальные траектории, сходящиеся в окрестность установившегося состояния в области  $\mathcal{D}_3$ . Графики траекторий изображены на Рис. 6. На нем видно, что в случае жестких ограничений, время приближения к установившемуся состоянию траекторий, стартующих из одинаковых начальных положений, больше, чем в случае стандартных ограничений (ср. Рис. 3)

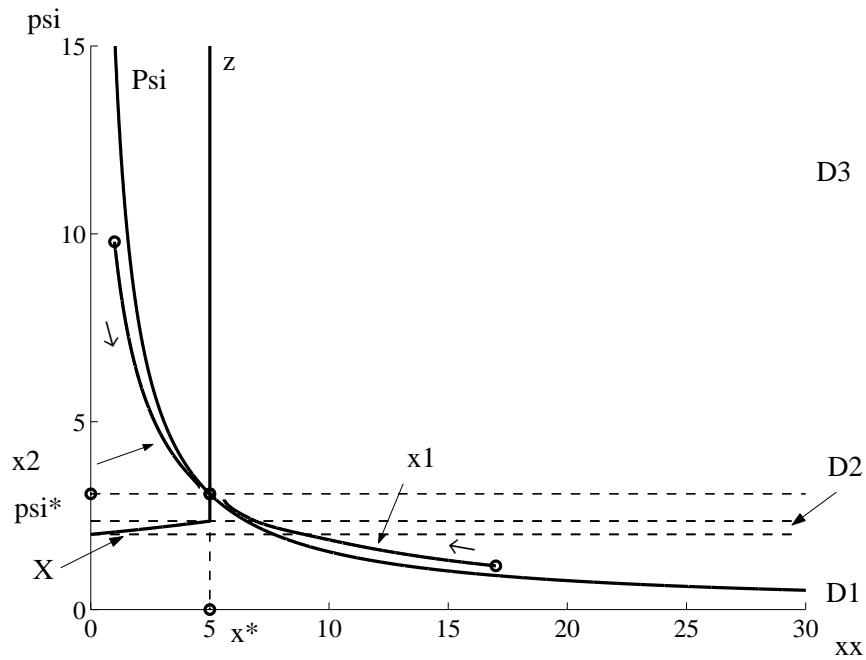


Рис. 5: Траектория при  $\Xi_1 = \{(x_1, \psi_1): x_1 = x_1(t), \psi_1 = \psi_1(t), t \in [0, T]\}$  при  $x(0) = 1, \psi(0) = 9.788$ , и  $\Xi_2 = \{(x_2, \psi_2): x_2 = x_2(t), \psi_2 = \psi_2(t), t \in [0, T]\}$  при  $x(0) = 17, \psi(0) = 1.162$ . За время  $T = 150$  траектории попадают в окрестность установившегося состояния в области  $\mathcal{D}_3$ :  $x_1(T) = 4.579$ ,  $\psi_1(T) = 3.25$ ;  $x_2(T) = 5.59$ ,  $\psi_2(T) = 2.928$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Случай, когда траектория полностью принадлежит области  $\mathcal{D}_3$  и решение задается постоянным управлением  $u = g$ , отсылает нас к истокам теории экономического роста. Именно постоянное заданное экзогенно управление рассматривал Роберт Солоу в своей модели, использующей уравнение Рэмзи (см., напр. [3]). По этой причине обращаем внимание на этот случай.

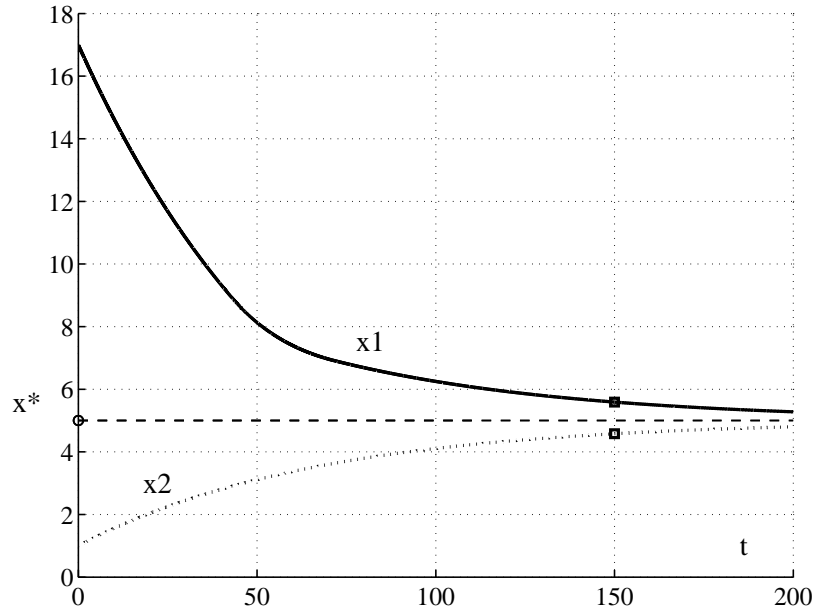


Рис. 6: График  $x_1(t)$  при  $x(0) = 1$ ,  $\psi(0) = 9.788$ ,  $g = 0.15$  и  $x_2(t)$  при  $x(0) = 17$ ,  $\psi(0) = 1.162$ ,  $g = 0.15$ . С момента времени  $T = 150$  работает регулятор в области  $\mathcal{D}_3$ :  $u(x) = g$ . Траектория  $x_1$  полностью содержится в области  $\mathcal{D}_3$ .

Моделирование примеров было выполнено при помощи программного комплекса, разработанного в пакете MATLAB, на базе динамических методов решения задач управления [20].

## 5 Экономическое равновесие при экзогенном технологическом развитии

Рассмотрим динамику установившегося состояния гамильтоновой системы в случае нестационарного коэффициента  $a = a(t)$  в уравнении для  $x$  (22). Для иллюстрации рассмотрим логистическую кривую, описывающую экзогенное технологическое развитие:

$$A(t) = \frac{GA_0 e^{rt}}{G + A_0(e^{rt} - 1)}, \quad (68)$$

где смысл постоянных  $A^0 > 0$  и  $r \geq 0$  тот же, что в модели Солоу (20), а  $G > A_0$  представляет собой максимально возможный уровень технологического развития (насыщения). Логистический рост является распространенной моделью в прикладных исследованиях [19].

Подставляя

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{r(G - A_0)}{G + A_0(e^{rt} - 1)} \quad (69)$$

в (14), получаем:

$$a(t) = -(1 - \alpha)\lambda - \frac{\dot{A}}{A} = -(1 - \alpha)\lambda - \frac{r(G - A_0)}{G + A_0(e^{rt} - 1)}. \quad (70)$$

В этом случае будем рассматривать ту же задачу управления, но с динамикой фазовой переменной (13), где  $a(t)$  вычисляется по формуле (70). Предыдущий анализ показывает, что замена динамики (22) динамикой (13) не вносит существенных изменений в применение принципа максимума.

В силу соотношений (50), (48) и ограничений на управление  $g$  имеем следующую динамику положения равновесия в зависимости от нестационарного параметра  $a(t)$ :

$$x^*(a, t) = \begin{cases} \frac{b\gamma}{\delta - a(t) - a(t)\gamma}, & \text{если } \frac{-a(t)\gamma}{\delta - a(t) - a(t)\gamma} \leq g, \\ -g\frac{b}{a(t)}, & \text{если } \frac{-a(t)\gamma}{\delta - a(t) - a(t)\gamma} > g. \end{cases} \quad (71)$$

Соответствующее равновесное управление задается функцией:

$$u^*(a, t) = \begin{cases} \frac{-a(t)\gamma}{\delta - a(t) - a(t)\gamma}, & \text{если } \frac{-a(t)\gamma}{\delta - a(t) - a(t)\gamma} \leq g, \\ g, & \text{если } \frac{-a(t)\gamma}{\delta - a(t) - a(t)\gamma} > g. \end{cases} \quad (72)$$

Отметим, что динамика установившегося состояния порождается рассматриваемой гамильтоновой системой. Исходя из этого, можно предположить, что, как и в случае стационарного  $a$ , в случае нестационарного коэффициента  $a(t)$  найдется единственная оптимальная траектория, которая сойдется в нестационарное установившееся состояние на бесконечном горизонте времени. Этот факт, будучи подтвержден дополнительным анализом, может предоставить возможность для дальнейшего развития модели. Рассмотрение нестационарных коэффициентов в линейном уравнении фазовой переменной позволит внедрять в задачу оптимального роста временные тренды, основанные на реальных данных.

## 6 Заключение

В работе предложен способ, облегчающий поиск оптимальных траекторий в задачах экономического роста. Показано, что *модель Рэмзи* сводится к задаче оптимального управления с линейной

динамикой и нелинейным функционалом *заменой Бернулли*. Для задачи с стационарными коэффициентами выполнен исчерпывающий анализ *гамильтоновой системы в принципе максимума Понтрягина* с учетом ограничений на управление. Выявлено дополнительное установившееся состояние гамильтоновой системы в случае, когда ограничения на управления малы. Таким образом, векторное поле гамильтоновой системы отражено в двух качественных картинах, которые могут сменяться в зависимости от ограничений на управление. Построены оптимальные траектории, сходящиеся к соответствующему установившемуся состоянию. Алгоритм построения траекторий сочетает в себе методы оптимального управления и регулирования (стабилизации).

В статье затронут случай нестационарных коэффициентов в задаче управления. Показано влияние экзогенной динамики технологического роста, определяемой логистической кривой, на поведение установившегося состояния. Дальнейшая разработка предложенного подхода к экономическому моделированию может быть связана с развитием случая нестационарных коэффициентов. Этот случай позволяет рассматривать в *задаче оптимального роста* временные тренды внешних факторов развития и, следовательно, моделировать экономический рост в связке с процессами в демографии, экологии, и энергетике.

## Список литературы

- [1] **Ramsey F. P.** A mathematical theory of saving // The economic journal. 1928. Vol. 38. No 152. Pp. 543–559.
- [2] **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. Princeton University Press, 2008.
- [3] **Ромер Д.** Высшая макроэкономика. М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2014.
- [4] **Моисеев Н. Н.** К теории оптимального управления на бесконечном интервале времени // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 4. С. 852–861.
- [5] **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1969.
- [6] **Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи математических наук. 2012. Т. 67. № 2 (404). С. 3–64.
- [7] **Асеев С. М., Кряжимский А. В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. 2007. № 257. С. 3–271.
- [8] **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. 2-е изд. М.: Наука. 1966.
- [9] **Максимов В. И., Осипов Ю. С.** О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. Т. 56. No 1. 2016. С. 16–28.
- [10] **Grass D., Caulkins J. P., Feichtinger G., Tragler G., Behrens D. A.** Optimal control of nonlinear processes. Berlin. Springer, 2008.
- [11] **Solow R. M.** Technical change and the aggregate production function// The review of Economics and Statistics. 1957. Vol. 39. No. 3. Pp. 312–320.
- [12] **Smith W. T.** A closed form solution to the Ramsey model // The BE Journal of Macroeconomics. 2006. Vol. 6. No 1. Pp. 1–27.

- [13] **Shell K.** Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // *Mathematical Systems. Theory and Economics*, ed. by H.W. Kuhn and G.P. Szego. Berlin. Springer, 1969.
- [14] **Красовский А. А., Тарасьев А. М.** Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*. 2008. № 262. С. 127–145.
- [15] **Кини Р. Л., Райфа Х.** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
- [16] **Красовский А. А., Тарасьев А. М.** Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста // *Автомат. и телемех.* 2007. № 10. С. 38–52.
- [17] **Красовский А. А., Тарасьев А. М.** Построение нелинейных регуляторов в моделях экономического роста // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2009. Т. 15. № 1. С. 127–138.
- [18] **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [19] **Krasovskii A. A., Tarasyev A. M., Watanabe C.** Optimization of functionality development // *Applied Mathematics and Computation*. 2010. Vol. 217. No 3. Pp. 1125–1134.
- [20] **Лебедев П. Д., Успенский А. А.** Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* Т. 49. No 3. 2009. С. 431–440.