

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, E. A. Samarskaya,
On reconstruction of inputs in parabolic systems,
Matem. Mod., 1997, Volume 9, Number 3, 51–72

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you
have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 147.125.98.169

May 4, 2016, 17:04:03



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

УДК 519.711.3

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© *А.В. Кряжимский, В.И. Максимов, Е.А. Самарская*

Институт прикладного системного анализа (ИАСА), Лаксенбург, Австрия,
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Для второго автора исследование было частично поддержано Международным научным фондом (гранты № NMD 000 и NMD 300) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант 93-011-16129).

Рассматривается задача моделирования (реконструкции) входов в параболических системах. Указываются устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмы ее решения. Общие конструкции применяются к задаче моделирования процесса загрязнения грунтовых вод, для которой исследуется проблема реконструкции переменных интенсивностей источников загрязнений.

ON RECONSTRUCTION OF INPUTS IN PARABOLIC SYSTEMS

A.V. Kryzhimskii, V.I. Maksimov, E.A. Samarskaia

ИАСА, А-2361, Laxenburg, Austria,
Institute of Mathematics and Mechanics, Urals Branch, Russ. Acad. Sci.

The problem of modelling (reconstruction) of inputs in parabolic systems is considered. The solving algorithms are suggested. These algorithms are stable with respect to the informational noises and the measurement disturbances. General constructions are applied to the problem of simulation of groundwater contamination process. In this case the problem of modelling of varying intensities of pollutant sources is investigated.

Введение. Надзор за окружающей средой часто требует данных об источниках загрязнения. Наиболее эффективный путь их получения — производить прямые замеры. Однако иногда источники загрязнения расположены так, что прямые замеры невозможны. В таких случаях величины загрязняющих входов устанавливаются через не прямые замеры, например, через замеры концентрации загрязняющего вещества. Как правило, такие замеры малоинформативны (берутся, скажем, на нескольких малых участках). Другой фактор, увеличивающий погрешность, состоит в том, что источники загрязнения меняют свою интенсивность, и, в общем случае, режимы загрязнений нестабильны.

Методологически задача реконструкции (моделирования) переменной интенсивности источников загрязнения относится к категории обратных задач

для динамических систем. Стандартной динамической моделью распространения загрязнителя в пространственной среде (например, резервуаре с водой) является дифференциальное уравнение параболического типа (см., например, [1-4]). Поэтому на уровне моделирования мы обратимся к обратной задаче для параболической системе. Задачи этого типа излагались в разных постановках во многих публикациях [5-11].

В настоящей статье мы предлагаем три метода реконструкции. Первый метод предназначен для определения информации о реальных режимах загрязнения, которая в принципе реконструируема по данным наблюдений. Метод обобщает описанный в [12] метод для обыкновенных дифференциальных уравнений. Согласно этому подходу, любая "линейная" информация о входных режимах либо реконструируема точно, либо нереконструируема (это приводит к практической рекомбинации о выборе схемы наблюдения: она должна быть спланирована так, чтобы требуемая информация была реконструируемой).

Второй наш подход обеспечивает достаточные условия реконструируемости. Соответствующий численный алгоритм реконструкции входа, основанный на методе динамической регуляризации [13, 14], позволяет вычислять приближения для текущих входных величин посредством конечномерных операций. Заметим, что аналогичный подход для параболических уравнений обсуждался в работах [15, 16], где были предложены другие методы реконструкции. Поскольку отмеченный выше алгоритм работает при особых условиях, мы дополняем его еще одним, применимым для общего случая. Алгоритм был описан в общем виде в [17] (и развит в [18]) как решающий задачу выпуклой оптимизации. Мы привязываем его к нашей ситуации посредством стандартной методологии теории некорректных задач (см. [19, 20]). Именно, ставится задача нахождения экстремальных входных режимов, совместимых с результатами наблюдения; экстремальность понимается относительно некоторого естественного числового показателя (например, интенсивности входного загрязнения, усредненная на определенном интервале времени). Заметим, что эта методология соответствует также одной из установок теории наблюдения (где рассматриваются функционалы поддержки для информационных регионов, совместимые с результатами наблюдения).

В разделе 1 даны методы реконструкции входа для абстрактной параболической системы. В разделе 2 описано частное уравнение, моделирующее процесс загрязнения в водном резервуаре; для этой модели применяется третий метод.

1. Реконструкция входов в абстрактных системах

1.1. Постановка задач. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ – сепарабельное и рефлексивное Банахово пространство, $(H, |\cdot|_H)$ – действительное гильбертово пространство, $H=H^*$, (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в H . Вложено в H плотно и непрерывно. Рассмотрим параболическую систему, поведение которой описывается следующим уравнением:

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad x(0) = x_0 \in H. \quad (1.1)$$

Здесь $A: V \rightarrow V^*$ линейный непрерывный оператор, удовлетворяющий при определенных $c > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ условию коэрцитивности

$$\langle Ay, y \rangle + \lambda |y|_H^2 \geq c \|y\|^2 \quad \forall y \in V;$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – двойственность между V и V^* ; $x(t)$ – положение системы в момент t ; $u(t)$ есть n -мерная величина зависящего от времени входа (управления), вызывающего движение системы; $f(\cdot) \in L_2(T; H)$ – заданное возмущение; $B: U = \mathbb{R}^n \rightarrow V$

$$Bu = \sum_{j=1}^n \omega_j u_j, \quad \omega_j \in V, \quad u_j \in \mathbb{R}.$$

Начальное положение x_0 считаем фиксированным.

Определение 1.1. Функция $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot))$ называется *решением* уравнения (1.1) на промежутке T , если а) $x(\cdot) \in W(T; V) = \{y(\cdot) \in L_2(T; V) : \dot{y}(\cdot) \in L_2(T; V^*)\}$; б) для п.в. $t \in T$ справедливо равенство (1.1), т.е.

$$\langle \dot{x}(t), v \rangle + \langle Ax(t), v \rangle = \langle Bu(t) + f(t), v \rangle \quad \forall v \in V, \text{ при п.в. } t \in T.$$

Из теоремы 1.2 [21, стр.110] следует, что для любого $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ существует единственное решение (1.1). Далее для простоты положим $f(t) = 0$.

Пусть имеется некоторый объект, называемый в дальнейшем наблюдателем, которому известно уравнение системы (1.1). Кроме того, в каждый момент времени t им замеряется вектор

$$z(t) = Px(t), \quad P \in L(H; \mathbb{R}^m), \tag{1.2}$$

несущий информацию о состоянии системы $x(t)$. Здесь $L(H; \mathbb{R}^m)$ – пространство линейных непрерывных функционалов, действующих из H в \mathbb{R}^m . Действительные входные значения $u(t)$ неизвестны. Задача наблюдателя (задача 1) состоит в том, чтобы вычислить $u(t)$ на основе всех доступных данных, т.е. уравнения (1.1) системы, начального положения, оператора наблюдения P и результатов наблюдения (1.2). Другими словами, наблюдателю требуется в текущее время s восстанавливать историю $u(\cdot)$ (т.е. все значения $u(t)$, $0 \leq t \leq s$) действительного входа, используя априорную информацию о системе и историю $z(\cdot)$ ($z(t)$, $0 \leq t \leq s$) результатов наблюдения.

Обозначим $L_{s, \xi}^2$ – пространство $L^2([s, \xi], \mathbb{R}^n)$; $U_s(z(\cdot))$ – множество всех $u(\cdot)$, при которых $x(\cdot)$ из (1.2) является решением (1.1); Z_s – множество всех результатов наблюдения на $[0, s]$; символ $x(\cdot)$ означает функцию со значением $x(t)$ в точке t , рассматриваемую как единое целое; сужение $x(\cdot)$ на интервал $[s, \xi]$ обозначается $x(\cdot)_{s, \xi}$; вход на $[0, s]$ ($s \geq 0$) есть функция $u(\cdot)$ из пространства $L_{0, s}^2$.

Непрерывный линейный функционал ℓ на пространстве $L_{0, s}^2$ для всех входов на $[0, s]$ отождествляется с элементом

$$\ell(\cdot) \in L_{0, s}^2, \tag{1.3}$$

который определяется посредством равенства

$$\ell(u(\cdot)) = \int_0^s (\ell(t), u(t)) \mathbb{R}^n dt.$$

Для каждого такого $\ell(\cdot)$ и для каждого результата наблюдения $z(\cdot)$ на $[0, s]$ введем образ множества $U_s(z(\cdot))$ под действием $\ell(\cdot)$:

$$R_s(\ell(\cdot), z(\cdot)) = \left\{ \int_0^s (\ell(t), u(t)) \mathbb{R}^n dt : u(\cdot) \in U_s(z(\cdot)) \right\}. \tag{1.4}$$

Определения. 1.2. Функционал (1.3) называется *реконструируемым* на $z(\cdot) \in Z_s$, если множество (1.4) одноэлементно, и *нереконструируемым* на $z(\cdot)$, если это множество совпадает со всей действительной прямой.

1.3. Функционал (1.3), являющийся реконструируемым (соответственно нереконструируемым) на каждом $z(\cdot) \in Z_s$, называется *реконструируемым* (соответственно *нереконструируемым*) на $[0, s]$.

1.4. Вход является реконструируемым на $z(\cdot) \in Z_s$, если каждый функционал (1.4) является реконструируемым на $z(\cdot)$.

1.5. Вход является реконструируемым на $[0, s]$, если он реконструируем на $z(\cdot)$ для каждого $z(\cdot) \in Z_s$.

Наряду с задачей 1 рассмотрим также следующую задачу (задача 2). Задан результат наблюдения $z(\cdot)$ на $[0, s]$. Найти все функционалы вида (1.3), реконструируемые на $z(\cdot)$ (на $[0, s]$), и все функционалы вида (1.3), нереконструируемые на $z(\cdot)$ (на $[0, s]$). Ниже будут установлены некоторые условия разрешимости задачи 2, а также приведены два алгоритма решения задачи 1.

1.2. Критерий совместимости. Пусть $Px = \{(p_1, x), \dots, (p_m, x)\}$, где $(p_1, \dots, p_m) \in \Pi_{-1}^m H$. Для любого $k \in [1: m]$ и $\sigma \geq 0$ определим функцию $w_k(\cdot, \sigma)$ как решение задачи Коши

$$\dot{w}(t) = A^* w(t), \quad (1.5)$$

$$w(\sigma) = p_k \quad (1.6)$$

на $]-\infty, \sigma]$ и равной нулю на $]\sigma, \infty[$. Здесь A^* — оператор, сопряженный с A . Введем обозначение

$$(\phi_k(t; \sigma))_j = (w_k(t, \sigma), \omega_j), \quad j = [1: n], \quad (1.7)$$

где (\cdot, \cdot) означает скалярное произведение в H ,

$$\phi_k(\cdot, \sigma) = \{(\phi_k(\cdot, \sigma))_1, (\phi_k(\cdot, \sigma))_2, \dots, (\phi_k(\cdot, \sigma))_n\},$$

$$g_k(a, \sigma) = a_k - (w_k(0, \sigma), x_0), \quad (a = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \in \mathbb{R}^m). \quad (1.8)$$

Из теоремы 1.2 (см. [21, стр. 110, 121]) следует, что существует единственное решение систем (1.5), (1.6) такое, что $w(\cdot, \sigma) \in W([-r, \sigma]; V)$ для любого $r \in (\sigma, +\infty)$.

Теорема 1.1. Вход $u(\cdot)$ совместим с результатом наблюдения $z(\cdot)$ на $[0, s]$ (или $u(\cdot) \in U_s(z(\cdot))$) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\sigma (\phi_k(t, \sigma)_{0, s}, u(t)) R^a dt = g_k(z(\sigma), \sigma) \quad (1.9)$$

для любого $\sigma \in [0, s]$ и $k \in [1: m]$.

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$ совместимо с $z(\cdot)$ и $x(\cdot)$ — траектория, соответствующая $u(\cdot)$. Тогда для всех $t \in [0, s]$ имеем (1.2) или, эквивалентно,

$$z^{(k)}(t) = (p_k, x(t)) \quad (1.10)$$

для каждого $k \in [1: m]$. Возьмем произвольные $\sigma \in [0, s]$ и $k \in [1: m]$. Пусть

$$w(\cdot) = w_k(\cdot, \sigma). \quad (1.11)$$

Умножим (1.1) скалярно на $w(t)$ и (1.5) на $x(t)$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем от 0 до σ . Получим

$$\int_0^\sigma [(w(t), \dot{x}(t)) - (\dot{w}(t), x(t))] dt = \int_0^\sigma [\langle w(t), -A(t)x(t) \rangle - \langle A^*(T)w(t), x(t) \rangle] dt + \int_0^\sigma (w(t), Bu(t)) dt.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю. Поэтому последнее равенство может быть переписано следующим образом:

$$\int_0^\sigma (\phi_k(t, \sigma), u(t)) R^n dt = (w(\sigma), x(\sigma)) - (w(0), x(0)).$$

Это равенство эквивалентно (1.9) (см. (1.11) и (1.7) для сравнения левых частей и (1.6), (1.10), (1.11) и (1.8) — для сравнения правых частей).

Наоборот, пусть $u(\cdot)$ удовлетворяет (1.9) для всех $\sigma \in [0, s]$ и $k \in [1:m]$. Предположим, что $u(\cdot)$ не совместимо с $z(\cdot)$. Тогда существуют $\sigma \in [0, s]$ и $i \in [1:m]$ такие, что

$$z^{(i)}(\sigma) \neq (p_i, x(\sigma)), \tag{1.12}$$

где $x(\cdot)$ есть траектория, соответствующая $u(\cdot)$. Как и выше, придем к равенству, аналогичному (1.9), где $z(\sigma)$ заменено на $Px(\sigma)$. Вычтем это равенство из (1.9). Результат противоречит (1.12). Теорема доказана.

1.3. Условия реконструируемости входа. Из теоремы 1.1 следует, что для элемента $\ell(\cdot) = \phi_k(\cdot, \sigma)_{\sigma, s}$, где $\sigma \in [0, s]$ и $k \in [1:m]$, значение $\int_0^\sigma (\ell(t), u(t)) R^n dt$ не зависит от $u(\cdot) \in U_s(z(\cdot))$. Следовательно, функционал $\ell(\cdot)$ реконструируем на $z(\cdot)$. Заметим, что так как данное утверждение справедливо для произвольного $z(\cdot) \in Z_s$, то функционал $\ell(\cdot)$ реконструируем на $[0, s]$. Следующая теорема устанавливает, что этот факт справедлив для любого функционала из линейной оболочки всех описанных выше функционалов $\ell(\cdot)$.

Пусть

$$K_s = \{\phi_k(\cdot, \sigma)_{\sigma, s} : \sigma \in [0, s], k \in [1:m]\}, \quad L = \text{Lin} K_s.$$

Символ $\text{Lin} E$ означает линейную оболочку множества E в пространстве $L^2([s, \xi]; \mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.2. *Каждый функционал $\ell(\cdot) \in L_s$ реконструируем на $[0, s]$, и каждый функционал $\ell(\cdot) \in L_{0, s}^2 \setminus L_s$ нереконструируем на $[0, s]$.*

Из теоремы 1.2) и определения реконструируемости входа вытекает

Следствие 1.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) вход является реконструируемым на $[0, s]$,
- (ii) вход является реконструируемым для некоторого $z(\cdot)$,
- (iii) $L_s = L_{0, s}^2$.

Теорема 1.2) и следствие 1.1, по существу, и решают задачу 1.

Приведем одно достаточное условие реконструируемости входа. В дальнейшем для простоты положим $n=m$. Введем $n \times n$ -мерные матрицы

$$D(p) = \{(\omega_j, p_k)\}_{j, k=1}^n, \quad K(t, s) = \{a_{j, k}(t, s)\}_{j, k=1}^n,$$

где k — номер строки и j — номер столбца,

$$a_{k,j}(t,s) = \begin{cases} (A\omega_j, z_k(t-s,0)), & t \geq s \\ 0, & t < s \end{cases}$$

и $z_k(t,0)$ – единственное решение уравнения

$$\dot{z}(t) + A^*z(t) = 0, \quad t \in [0, \vartheta], \quad z(0) = p_k$$

в смысле определения 1.1.

Пусть выполнено

Условие 1.1. $\omega_j \in \{x \in V: Ax \in H\} \quad \forall j \in [1:n]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. Пусть $\{(\omega_1, p_1), \dots, (\omega_n, p_n)\}$, $j \in [1:n]$ базис в \mathbb{R}^n . Тогда вход реконструируем на $[0, s]$.

Доказательство. Продифференцируем (1.9) при $\sigma = s$ по s .

Получим

$$(B^*p_i, u(s))\mathbb{R}^n + \int_0^s \frac{d}{ds}(\phi_i(t, s), u(t))\mathbb{R}^n dt = \frac{d}{ds}g_i(z(s), s). \quad (1.13)$$

Легко видеть, что из уравнения (1.5) следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\phi_i(t, s))_j &= \frac{d}{ds}(\omega_j, w_i(t, s)) = \frac{d}{ds}(\omega_j, w_i(t-s, 0)) = -\frac{d}{d\xi}(\omega_j, w_i(\xi, 0)) = \\ &= -\left\langle \frac{d}{d\xi}w_i(\xi, 0), \omega_j \right\rangle = \langle A^*w_i(\xi, 0), \omega_j \rangle = (A\omega_j, w_i(t-s, 0)) = (A\omega_j, z_i(s-t, 0)) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$\forall j \in [1:n]$.

Здесь $\xi = t-s$. Поэтому в силу (1.13), (1.14) имеем

$$\begin{aligned} D(p)u(s) + \int_0^s K(s, t)u(t)dt &= \dot{g}(s, z), \\ \dot{g}(s, z) &= \{\dot{g}_1(z(s), s), \dots, \dot{g}_n(z(s), s)\}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Заметим, что интегральное уравнение (1.15) имеет единственное решение $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$. Теорема доказана.

В случае реконструируемости входа на $[0, \vartheta]$ обозначим символом $u(\cdot)$ единственный элемент множества $U_\vartheta(z(\cdot))$.

1.4. Алгоритм реконструкции входа. Опишем динамический алгоритм аппроксимации управления $u(\cdot)$. Предположим, что условие 1.1 и условия теоремы 1.3 выполнены. Пусть элементы $z(t)$ измеряются неточно; а именно, результаты измерений

$$z^*(t_i) = (z_1^*(t_i), z_2^*(t_i), \dots, z_n^*(t_i)) \in \mathbb{R}^n$$

удовлетворяют неравенству

$$\|z^*(t) - z(t)\| \leq h, \quad (1.16)$$

где h есть величина погрешности измерения, $\|\cdot\|$ – норма в \mathbb{R}^n .

Фиксируем семейство Δ_h разбиений интервала T с диаметрами $\delta(h)$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} - \tau_{h,i} = \delta(h).$$

Введем разностную управляемую систему

$$\begin{aligned}
 w^{(1)}(\tau_{i+1}) &= w^{(1)}(\tau_i) + \delta D(p)v_i^h, \quad w^{(1)}(0) = 0, \\
 w^{(2)}(\tau_{i+1}) &= \delta^2 \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{j=1}^k K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \\
 w^{(3)}(\tau_{i+1}) &= \delta \sum_{j=1}^{i+1} K(\tau_{i+2}, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h, \quad w^{(j)} \in \mathbb{R}^n, \quad j \in [1:3].
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Назовем ее *моделью*. Перед начальным моментом значение $h \in (0,1)$ и разбиение $\Delta = \Delta_h \{ \tau_{h,i} \}_{i=0}^{m_h}$, $m = m_h$ отрезка T фиксируем. Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. На i -м шаге, выполняющемся на интервале времени $\delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \geq 1$, производятся следующие операции. В момент $\tau_{h,i}$ вычисляются векторы

$$\begin{aligned}
 v_i &= (g^*(\tau_{i+1}) - g^*(\tau_i)) / \delta - w^{(3)}(\tau_i), \quad g^*(\tau_i) = \{g_1^*(\tau_i), g_2^*(\tau_i), \dots, g_n^*(\tau_i)\}, \\
 g_k^*(\tau_i) &= z_k^*(\tau_i) - (w_k(\tau_i, \vartheta), x_0) = z_k^* - (z_k(\vartheta - \tau_i, 0), x_0), \quad k \in [1:n].
 \end{aligned}$$

Затем определяется управление

$$\begin{aligned}
 v^h(t) &= v_i^h \quad (t \in \delta_{h,i}), \\
 v_i^h &= \begin{cases} |v_i| D^{-1}(p) s_i' / |s_i|, & |s_i| \neq 0 \\ 0, & |s_i| = 0; \end{cases} \\
 s_i &= g^*(\tau_i) - g^*(0) - w^{(1)}(\tau_i) - w^{(2)}(\tau_i).
 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает транспонирование. После этого преобразуется модель (1.17) из состояния

$$w(\tau_{h,i}) = \{w^{(1)}(\tau_{h,i}), w^{(2)}(\tau_{h,i}), w^{(3)}(\tau_{h,i})\} \in \mathbb{R}^{3n}$$

в состояние $w(\tau_{h,i+1})$. Процесс заканчивается в момент времени ϑ .

Теорема 1.4. Если $h/\delta(h) \rightarrow 0$, $\delta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то $v^h(\cdot) \rightarrow u(\cdot; z(\cdot))$ слабо в $L^2(T; \mathbb{R}^n)$ при $h \rightarrow 0$ для любого $z(\cdot) \in Z_\vartheta$.

Доказательство теоремы приводится по схеме доказательства соответствующего утверждения работы [16].

Имеет место

Лемма 1.1. *Равномерно по всем $h \in (0,1)$, $\{\Delta_h\}$ с диаметром $\delta = \delta(h)$, $h/\delta(h) \leq 1$ и $z^*(\cdot)$, удовлетворяющим (1.16), справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\tau_i) &= |g(\tau_i) - g(0) - w^{(1)}(\tau_i) - w^{(2)}(\tau_i)|^2 \leq c(h/\delta + \delta) \quad \forall i \in [1:m_h - 1], \\
 \sum_{j=1}^{m_h - 1} \delta |v_{j-1}^h|^2 &\leq c_*, \quad g(t) = g(z(t), t).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Оценим изменение величины

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\tau_i) &= |g(\tau_i) - g(0) - w^{(1)}(\tau_i) - w^{(2)}(\tau_i)|^2 = |g(\tau_i) - g(0) - \sum_{k=1}^i \delta D(p)v_{k-1}^h - \\
 &\quad - \sum_{k=1}^i \delta \left(\sum_{j=1}^k \delta K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h \right)|^2 \quad (i \in [1:m_h]).
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Имеем

$$\left| \int_0^s K(s, \tau) v^h(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^k \delta K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h \right| \leq 2\omega_k(\delta) \delta \sum_{j=1}^k |v_{j-1}^h| + k_0 \delta |v_k^h|,$$

$$|K(t, \tau)|_n \leq k_0 \quad (t, \tau \in T),$$

где $|\cdot|_n$ — норма $n \times n$ -матрицы. Поэтому верна оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\tau_i) &\equiv \left| \int_0^{\tau_i} \{g(s) - D(p)v^h(s) - \int_0^s K(s, \tau)v^h(\tau) d\tau\} ds \right| \leq \\ &\leq \varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \left| \int_0^{\tau_i} \int_0^s K(s, \tau)v^h(\tau) d\tau ds - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \delta K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h \right| \leq \\ &\leq \varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \delta \{2\vartheta + \omega_k(\delta) + k_0\delta\} \sum_{j=1}^i |v_{j-1}^h|. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь $\omega_k(\cdot)$ — модуль непрерывности функции $K(t, \tau) = K(t - \tau)$, $0 \leq \tau \leq t \leq \vartheta$. Далее справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{i+1} \sum_{j=1}^k \delta^2 K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h = \sum_{j=1}^{i+1} \left\{ \sum_{k=j}^{i+1} \delta^2 K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h \right\}, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{k=j}^{i+1} \delta^2 K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h &= \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^i \delta^2 K(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h + \\ &+ \sum_{j=1}^i \delta^2 K(\tau_{i+1}, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h + \sum_{k=j}^{i+1} \delta^2 K(\tau_k, \tau_i) v_i^h. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из (1.18)-(1.21) следуют соотношения

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = \varepsilon(\tau_i) + r_i' \mu_i + |\mu_i|^2, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} r_i &= g(\tau_i) - g(0) - w^{(1)}(\tau_i) - w^{(2)}(\tau_i), \quad \mu_i = g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i) - \delta^2 \{2K(\tau_{i+1}, \tau_i) + \\ &+ K(\tau_i, \tau_i)\} v_i^h - \delta^2 \sum_{j=1}^i L(\tau_{i+1}, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h - \delta D(p) v_i^h. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть также, что

$$|r_i| \leq C_1 + C_2 \delta \sum_{j=1}^i |v_{j-1}^h|, \quad i \geq 1, \quad (1.23)$$

$$|\mu_i|^2 \leq C_3 \delta \left\{ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |g(s)|^2 ds + \sum_{j=1}^{i+1} \delta^2 |v_{j-1}^h|^2 + \delta |v_i^h|^2 \right\}. \quad (1.24)$$

Здесь константы C_j , $j \in [1:3]$ не зависят от i , δ . Поэтому, принимая во внимание правило определения v_i^h , выводим из (1.22) неравенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + 4h |\mu_i| + C_4 (1 + |r_i|) \delta^2 |v_i^h| + |\mu_i|^2 + C_5 h (|r_i| + h). \quad (1.25)$$

Заметим, что

$$d_i \equiv \delta_i |v_{i-1}^h|^2 \leq a_i + C_6 \delta \sum_{j=1}^{i-1} d_j, \quad \sum_{j=1}^{m_h-1} a_j < +\infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m_h-1} \delta |v_j^h|_{-1}^2 \equiv |v^h(\cdot)|_{L_2(T,U)}^2 \leq C_7 < +\infty. \quad (1.26)$$

Таким образом, из (1.23)-(1.26) получаем

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + C_8(h/\delta + \delta), \quad i \in [0; m_h - 1].$$

Лемма доказана.

Замечания. 1.1. Уравнение модели может быть задано в виде дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{w}^{(1)}(t) &= D(p)v^h(t), \\ \dot{w}^{(2)}(t) &= w^{(3)}(t), \quad t \in T, \\ w^{(1)}(0) &= w^{(2)}(0) = 0, \end{aligned}$$

где

$$w^{(3)}(t) = \int_0^t K(t, \tau) v^h(\tau) d\tau.$$

В этом случае теорема 1.4. также справедлива.

1.2. Если решение $z(\cdot)$ сопряженного уравнения достаточно гладкое, например, $z(\cdot) \in L_2(T, H)$, то условие 1.1 может быть заменено более слабым условием $\omega_j \in H$. В этом случае теоремы 1.3 и 1.4 будут справедливы, если положить

$$a_{k,j}(s, t) = \begin{cases} -(\omega_j, \dot{z}_k(s-t, 0)), & t \geq s \\ 0, & t < s. \end{cases}$$

1.3. Из теоремы 1.4 следует, что если величины h , $\delta(h)$ и $h/\delta(h)$ достаточно малы, то $v^h(\cdot)$ будет являться "хорошей" аппроксимацией входа $u(\cdot; z(\cdot))$.

1.5. Аппроксимация экстремальных входов. Укажем еще один алгоритм решения задачи 1. Рассмотрим сейчас общий случай, когда условия реконструируемости входа теоремы 1.3 не выполняются. Зафиксируем результат наблюдения $z(\cdot) \in Z_\theta$. Предположим, что на все входы априори наложены связи

$$u(\cdot) \in G, \quad (1.27)$$

G — заданное выпуклое ограниченное множество в $L_{0,\theta}^2$. Нас будет интересовать нахождение входов из множества $U_\theta(z(\cdot); G) = U_\theta(z(\cdot)) \cap G$. Именно, мы укажем метод для приближения либо минимальной величины некоторого выпуклого функционала на $U_\theta(z(\cdot); G)$, либо аргумента, доставляющего этот минимум. Норма и скалярное произведение в $L_{0,\theta}^2$ ниже обозначаются $\|\cdot\|$ и (\cdot, \cdot) соответственно. Предлагаемый метод предназначен для решения системы интегральных уравнений (1.9) с ограничением (1.27). Перепишем (1.9) в виде

$$\Phi u(\cdot) = g(\cdot). \quad (1.28)$$

Здесь $g(\sigma)$ — вектор с координатами $g_k(z(\sigma), \sigma)$ ($k=1, \dots, m$) и Φ — линейный оператор из $L^2(T; R^n)$ в $L^2(T; R^m)$ вида

$$\Phi u(\cdot) = \int_0^\sigma C(t, \sigma) u(t) dt, \quad (1.29)$$

$C(t, \sigma)$ — $m \times n$ -мерная матрица, k -я строка которой есть вектор $\phi_k(t, \sigma)$. Вос-

пользуемся методом регуляризации Тихонова для решения уравнения (1.28) при ограничениях (1.27). Пусть $J(\cdot)$ выпуклый функционал, ограниченный на G , и J^0 — его минимальное значение на $U_\vartheta(z(\cdot); G)$. Известно, что если $J(\cdot)$ строго выпукло (в частности, $J(\cdot) = \|\cdot\|_\vartheta^2$), тогда существует единственный (в смысле L^2_{ϑ}) элемент, доставляющий минимум $J(\cdot)$ на $U_\vartheta(z(\cdot); G)$; мы будем обозначать этот элемент через $u^0(\cdot)$.

Теорема 1.5. Пусть $v_N \in G$,

$$\|\Phi v_N(\cdot) - g(\cdot)\|_\vartheta^2 + \alpha_N J(v_N(\cdot)) - \alpha_N J^0 \leq \varepsilon_N \quad (N=1, 2, \dots), \quad (1.30)$$

$$\varepsilon_N \rightarrow 0+, \quad \alpha_N \rightarrow 0+, \quad \varepsilon_N / \alpha_N \rightarrow 0+ \quad (N \rightarrow \infty).$$

Тогда

$$J(v_N(\cdot)) \rightarrow J^0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (1.31)$$

и, если $J(\cdot)$ строго выпукл,

$$\|v_N(\cdot) - u^0(\cdot)\|_\vartheta \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (1.32)$$

Доказательство см., например, в [20, стр. 182].

Следующий конечношаговый алгоритм для вычисления $v_N(\cdot)$, удовлетворяющего (1.30) с параметрами ε_N и α_N , основан на результатах работы [12].

Алгоритм 1.

Параметры: N, ℓ_N — натуральные, $\alpha > 0$.

Выход: $v_N(\cdot) \in G$.

Переменные: $y_i(\cdot) \in L^2(T; R^n)$.

Начальный шаг: Положим $y_0(\cdot) = 0$.

i -й шаг ($0 \leq i \leq \ell_N - 1$): найдем решение $r_i(\cdot)$ задачи

$$2(\Psi y_i(\cdot) - ig(\cdot)) / \ell_N, \Psi r(\cdot) + \alpha J(r(\cdot)) \rightarrow \min, \quad r(\cdot) \in G. \quad (1.33)$$

Положим

$$\dot{y}_{i+1}(\cdot) = y_i(\cdot) + r_i / \ell_N. \quad (1.34)$$

Конечный шаг: Полагаем $v_N(\cdot) = y_{\ell_N}(\cdot)$.

Лемма 1.2 [12, лемма 1.1]. Пусть $v_N(\cdot)$ выход алгоритма 1. Тогда выполняется неравенство (1.30) с $\varepsilon_N = c^2 / \ell_N$, где число c таково, что $\|\Phi u(\cdot) - g(\cdot)\|_\vartheta \leq c$ для всех $u(\cdot) \in G$.

Лемма 1.2 и теорема 1.5 приводят к следующей теореме.

Теорема 1.6. Пусть $\alpha_N \rightarrow 0+$, $1 / \alpha_N \ell_N \rightarrow 0+$ ($N \rightarrow \infty$) и $v_N(\cdot)$ — выход алгоритма 1 для любого $N=1, 2, \dots$. Тогда имеет место сходимость (1.31) и, если функционал $J(\cdot)$ строго выпукл, справедливо соотношение (1.32).

1.6. Модель распространения загрязнений. Применим некоторые полученные ранее результаты к стандартной модели распространения загрязнения. Неформальная постановка задачи следующая. Пусть задан водный резервуар, занимающий область Ω . Несколько источников загрязнения концентрируются в областях $\Omega_1, \dots, \Omega_n \subset \Omega$. В других частях концентрация загрязняющего вещества измеряется. Требуется реконструировать неизвестные, зависящие от времени, интенсивности $u_1(t), \dots, u_n(t)$ источников загрязнения через результаты измерений $z_1(t), \dots, z_m(t)$.

Итак, в нашей модели Ω — двумерная ограниченная область; ξ — позиция текущей точки Ω . Положим, что скорость входной концентрации загрязнения в каждой точке $\xi \in \Omega_j$ в момент t задается через $u_j(t) \omega_j(\xi)$, где

$$\omega_j(\xi) > 0 \quad (\xi \in \Omega_j), \quad \omega_j(\xi) = 0 \quad (\xi \notin \Omega_j). \quad (1.35)$$

Таким образом, $u_j(t)$ служит для измерения интенсивности источников, распределенных внутри Ω_j . Логично предположить условие калибровки

$$\int_{\Omega_j} \omega_j(\xi) d\xi = 1. \quad (1.36)$$

Тогда $u_j(t)$ имеет смысл скорости общего потока загрязнения в области Ω_j . Далее, пусть $x(t, \xi)$ — текущее состояние концентрации загрязняющего вещества в точке ξ . Окончательный результат текущих измерений $x(t, \xi)$ в наблюдаемой области Θ_k

$$z_k(t) = \int_{\Theta_k} p_k(\xi) x(t, \xi) d\xi: \quad (1.37)$$

Здесь

$$p_k(\xi) > 0 \quad (\xi \in \Theta_k), \quad p_k(\xi) = 0 \quad (\xi \notin \Theta_k), \quad (1.38)$$

$$\int_{\Theta_k} p_k(\xi) d\xi = 1. \quad (1.39)$$

Таким образом, $z_k(t)$ есть средняя концентрация загрязняющего вещества в θ_k с весом $p_k(\xi)$.

1.7. Параболическая модель. Следуя стандартному подходу (см. [1]), мы смоделируем процесс распространения загрязнения в области Ω с помощью параболического уравнения вида

$$\frac{\partial x(t, \xi)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi_1} + a_2 \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial t} - \Delta x(t, \xi) = Bu(t)(\xi) \quad (1.40)$$

с граничными условиями

$$x(t, \xi) = 0 \quad (\xi \in \Gamma). \quad (1.41)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, a_1, a_2 — постоянные коэффициенты перехода, Γ — граница области Ω , $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ — вектор источника интенсивности и

$$Bu(t)(\xi) = \sum_{j=1}^n u_j(t) \omega_j(\xi).$$

Время t изменяется на промежутке $T = [0, \vartheta]$; начальная комбинация фиксирована:

$$x(0, \xi) = x_0(\xi). \quad (1.42)$$

Предположим, что функции $\omega_j(\cdot)$ ($j=1, \dots, n$) и $p_k(\xi)(\cdot)$ ($k=1, \dots, m$) дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют (1.35)–(1.39), а граница Γ области Ω — гладкая.

Согласно [21], (1.40), (1.41) является частным случаем (1.1) и все условия параграфа 1.1 выполнены при $V = H_0^1(\Omega)$ и $H = L^2(\Omega, R)$. Поэтому все результаты главы 1 справедливы.

Замечание 1.4. Легко проверить, что $\omega_k(t, \sigma) = \omega_k(t, \sigma, \cdot)$ (см. параграф 1.2 (1.5), (1.6)) имеет вид

$$\omega_k(t, \omega, \cdot) = 0 \quad (t > \sigma), \quad \omega_k(t, \sigma, \cdot) = \zeta_k(\sigma - t, \cdot) \quad (t \leq \sigma),$$

где $\zeta_k(\cdot, \cdot)$ решение задачи Коши

$$\frac{\partial \zeta(t, \xi)}{\partial t} - a_1 \frac{\partial \zeta(t, \xi)}{\partial \xi_1} - a_2 \frac{\partial \zeta(t, \xi)}{\partial \xi_2} - \Delta \zeta(t, \xi) = 0, \quad \zeta(0, \xi) = p_k(\xi) \quad (1.43)$$

на $[0, \infty)$ с граничным условием

$$\zeta(t, \xi) = 0 \quad (\xi \in \Gamma). \quad (1.44)$$

1.8. Уточнение задачи: аппроксимация экстремальных входов. Остановимся подробнее на проблеме, схематически описанной в параграфе 1.6. Заметим, что интенсивности загрязнения $u_j(t)$ – величины неотрицательные и ограниченные; положим также, что конечные верхние границы u_j^* для них оцениваются априори. Тогда мы приходим к включению (1.27), принимающему вид

$$0 \leq u_j(t) \leq u_j^* \quad (j=1, 2, \dots). \quad (1.45)$$

Фиксируем результат наблюдения $z(\cdot)$ (в виде (1.37)). $U_\vartheta(z(\cdot); G)$ есть множество всех входов $u(\cdot)$, удовлетворяющих (1.45) и совместимых с результатом наблюдения $z(\cdot)$, то есть таких, что (1.37) выполняется для решения $x(\cdot, \cdot)$ задачи (1.40)-(1.42).

Рассмотрим линейный функционал $J^*(\cdot)$ на $L_{0, \vartheta}^2$, отождествляемый с функцией $q(\cdot) \in L_{0, \vartheta}^2$:

$$J^*(u(\cdot)) = \int_0^\vartheta q(t) u(t) dt. \quad (1.46)$$

Первая задача, которая нас будет интересовать, – нахождение минимального и максимального значения функционала $J^*(\cdot)$ на $U_\vartheta(z(\cdot); G)$; обозначим эти значения через J_{\min}^* и J_{\max}^* соответственно. Логично записать $q(\cdot)$ в следующем виде:

$$q_j(t) = 0 \quad (j \neq j^*), \quad q_{j^*}(t) = 1 \quad (t \in [\tau_1, \tau_2] \subset [0, \vartheta]), \quad q_{j^*}(t) = 0 \quad (t \notin [\tau_1, \tau_2]).$$

В этом случае $J^*(u(\cdot))$ – средняя интенсивность j^* -го источника (сосредоточенного на Ω_{j^*}) на интервале времени $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, \vartheta]$, и J_{\min}^* , J_{\max}^* суть соответственно минимальное и максимальное значения, не противоречащие результату наблюдения $z(\cdot)$. Имея эти значения, можно с уверенностью сказать, что действительная средняя интенсивность j^* -го источника на интервале времени $[\tau_1, \tau_2]$ находится между ними.

Если положить

$$q_j(t) = 1 \quad (t \in [\tau_1, \tau_2]), \quad q_j(t) = 0 \quad (t \notin [\tau_1, \tau_2]) \quad (j=1, \dots, n),$$

то $J^*(u(\cdot))$ превращается в суммарную среднюю интенсивность всех источников на $[\tau_1, \tau_2]$, а J_{\min}^* , J_{\max}^* означают их гарантированные нижнюю и верхнюю границы.

Наша вторая задача – найти минимальное значение J_{\min}^{**} квадратичного функционала

$$J^{**}(u(\cdot)) = \int_0^\vartheta \sum_{j=1}^n u_j^2(t) dt = \|u(\cdot)\|_\vartheta^2$$

и вход $u^{**}(\cdot)$, минимизирующий J^{**} на $U_\vartheta(z(\cdot); G)$.

1.9. Априорные построения. Для решения задач, сформулированных выше, используем алгоритм 1. Рассматривая первую задачу, примем

$$J(u(\cdot)) = J^*(u(\cdot)) = \int_0^{\vartheta} q(t)'u(t)dt \quad (1.47)$$

и

$$J(u(\cdot)) = -J^*(u(\cdot)) = \int_0^{\vartheta} (-q(t))'u(t)dt. \quad (1.48)$$

Очевидно, $J_{\min}^* = J^0$ для функционала $J(\cdot)$, определяемого согласно (1.47), и $J_{\max}^* = -J^0$ для функционала $J(\cdot)$, определяемого согласно (1.48). Рассматривая втормую задачу, используем алгоритм 1, полагая

$$J(u(\cdot)) = J^{**}(u(\cdot)). \quad (1.49)$$

Необходимо уточнить вид функции $g(\cdot)$ (см. (1.28)) и оператора Φ (1.29). По определению, для любого $\sigma \geq 0$ k -я координата вектора $g(\sigma)$ есть

$$g_k(\sigma) = g_k(z_k(\sigma), \sigma) = z_k(\sigma) - \int_{\Omega} \zeta_k(\sigma, \xi) x^0(\xi) d\xi. \quad (1.50)$$

В свою очередь k -я строка матрицы $C(t, \sigma)$ есть n -мерный вектор $\phi_k(t, \sigma)$ с координатами (1.7). В силу замечания 1.4, мы можем записать

$$c_{kj}(t, \sigma) = c_{kj}(\sigma - t) = \int_{\Omega_j} \zeta_k(\sigma - t, \xi) \omega_j(\xi) d\xi \quad (\sigma \geq t). \quad (1.51)$$

Таким образом,

$$C(t, \sigma) = C(\sigma - t) = (c_{kj}(\sigma - t)), \quad (k=1, \dots, m, j=1, \dots, n) \quad (\sigma \geq t). \quad (1.52)$$

Конкретизируем вид решения $r_i(\cdot)$ экстремальной задачи (1.33). Рассмотрим первый член в минимизируемом функционале

$$Q_i(r(\cdot)) = 2(\Phi y_i(\cdot) - i g(\cdot) / \ell_N, \Phi r(\cdot))_{\vartheta}.$$

Согласно (1.29) имеем

$$Q_i(r(\cdot)) = 2 \int_0^{\vartheta} \psi_i(\sigma)' \int_0^{\sigma} C(t, \sigma) r(t) dt d\sigma,$$

где

$$\psi_i(\sigma) = \int_0^{\sigma} C(\tau, \sigma) y_i(\tau) d\tau - i g(\sigma) / \ell_N. \quad (1.53)$$

Используя теорему Фубини, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} Q_i(r(\cdot)) &= 2 \int_0^{\vartheta} \int_0^{\sigma} \psi_i(\sigma)' C(t, \sigma) r(t) dt d\sigma = 2 \int_0^{\vartheta} \int_0^{\sigma} \psi_i(\sigma)' C(t, \sigma) r(t) d\sigma dt = \\ &= 2 \int_0^{\vartheta} \sum_{j=1}^n (\beta_j(t))_j r_j(t) dt, \end{aligned}$$

где $(\beta_j(t))_j$ - j -я координата вектора

$$\beta_j(t) = \int_0^{\vartheta} \psi_i(\sigma)' C(t, \sigma) r(t) d\sigma. \quad (1.54)$$

Теперь для функционала (1.47) задача (1.33) принимает вид

$$2 \int_0^{\vartheta} \sum_{j=1}^n ((\beta_i(t))_j + \alpha_N g_j(t)/2)(r(t))_j dt \rightarrow \min, \quad 0 \leq (r(t))_j \leq u_j^* \quad (j=1, \dots, n).$$

Ее решение таково

$$(r_j^{(\min)}(t))_j = \begin{cases} u_j^*, & (\beta_i(t))_j + \alpha_N g_j(t)/2 \leq 0 \\ 0, & (\beta_i(t))_j + \alpha_N g_j(t)/2 > 0 \end{cases} \quad (j=1, \dots, n). \quad (1.55)$$

Аналогично для функционала (1.48) решение задачи (1.33) записывается в виде:

$$(r_j^{(\max)}(t))_j = \begin{cases} u_j^*, & (\beta_i(t))_j + \alpha_N g_j(t)/2 \leq 0 \\ 0, & (\beta_i(t))_j + \alpha_N g_j(t)/2 > 0 \end{cases} \quad (j=1, \dots, n). \quad (1.56)$$

Для функционала (1.49) задача (1.33) принимает вид

$$2 \int_0^{\vartheta} \sum_{j=1}^n ((\beta_i(t))_j (r(t))_j + \alpha_N (r(t))_j^2 / 2) dt \rightarrow \min, \quad 0 \leq (r(t))_j \leq u_j^* \quad (j=1, \dots, n).$$

Ее решение таково:

$$(r_j^{(\min)}(t))_j = \begin{cases} -(\beta_i(t))_j / \alpha_N & -(\beta_i(t))_j / \alpha_N \in [0, u_j^*] \\ 0, & -(\beta_i(t))_j / \alpha_N < 0 \\ u_j^*, & -(\beta_i(t))_j / \alpha_N > u_j^* \end{cases} \quad (j=1, \dots, n).$$

1.10. Алгоритмы аппроксимации. Рассмотрим первую проблему, поставленную в разделе 1.8. Алгоритм 1, решающий эту задачу, принимает следующий вид.

Алгоритм 2.

Параметры: N, ℓ_N – натуральные, $\alpha_N > 0$.

Выход: $J_N^{(\min)}, J_N^{(\max)}$ – действительные.

Переменные: $y_i^{(\min)}, y_i^{(\max)}(\cdot) \in L^2(T, R^n)$.

Подготовка данных для решения: Для $k=1, \dots, m$ вычисляем значения $\zeta_k(t, \xi)$ ($t \in [0, \vartheta], \xi \in \Omega$) решения задачи (1.43), (1.44). Для $k=1, \dots, m$ вычисляем (1.50) ($\sigma \in [0, \vartheta]$) и строим матрицу значений (1.51), (1.52) ($\sigma \in [0, \vartheta], t \in [0, \sigma]$).

Начальный шаг: Полагаем $y_0^{(\min)}(t) = 0, y_0^{(\max)}(t) = 0$ ($t \in [0, \vartheta]$).

i -й шаг ($0 \leq i \leq \ell_N - 1$): Полагаем $y_i(t) = y_i^{(\max)}(t), y_i(t) = y_i^{(\min)}(t)$. Вычисляем $\psi_i(t) = \psi_i^{(\max)}(t)$ и $\psi_i(t) = \psi_i^{(\min)}(t)$ согласно (1.53), $\beta_i(t) = \beta_i^{(\max)}(t)$ и $\beta_i(t) = \beta_i^{(\min)}(t)$ (1.54), $r_i^{(\min)}(t), r_i^{(\max)}(t)$ согласно (1.55) и (1.56) ($t \in [0, \vartheta]$). Затем переписываем y_i

$$y_{i+1}^{(\min)}(t) = y_i^{(\min)}(t) + r_i^{(\min)}(t) / \ell_N, \quad y_{i+1}^{(\max)}(t) = y_i^{(\max)}(t) + r_i^{(\max)}(t) / \ell_N, \\ (t \in [0, \vartheta]).$$

Конечный шаг: Полагаем

$$J_N^{(\min)} = \int_0^{\vartheta} q(t)' y_N^{(\min)}(t) dt, \quad J_N^{(\max)} = \int_0^{\vartheta} q(t)' y_N^{(\max)}(t) dt.$$

Из теоремы 1.6 следует

Теорема 1.7. Пусть функционал $J^*(\cdot)$ определен через (1.46) и J_{\min}^* , J_{\max}^* суть минимальное и максимальное значения на $U_\vartheta(z(\cdot); G)$ соответственно. Пусть

$$\alpha_N \rightarrow 0+, \quad 1/\alpha_N \varepsilon_N \rightarrow 0+ \quad (N \rightarrow \infty)$$

и $J_N^{(\min)}$, $J_N^{(\max)}$ – выход алгоритма 2 для любого $N=1, 2, \dots$. Тогда

$$J_N^{(\min)} \rightarrow J_{\min}^*, \quad J_N^{(\max)} \rightarrow J_{\max}^* \quad (N \rightarrow \infty).$$

2. Моделирование процесса загрязнения грунтовых вод и восстановление источников

В этом пункте мы применяем алгоритмы из раздела 1.10 к математической модели процесса переноса загрязняющей субстанции грунтовыми водами, интегрированной в информационную систему по контролю. Эта модель и информационная система, озаглавленная **XGW: A Prototype Expert System User Interface Interactive Modeling of Groundwater Contamination**, были разработаны в IASA, Проект "Advanced Computer Applications". Данная математическая модель представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных и состоит из двух содержательных частей: движение жидкости и переноса загрязнения в неограниченном водном регионе.

Решение проблем загрязнения грунтовых вод, как правило, требует данных об источниках загрязнения. Для запуска моделирующего процесса необходимо знать начальные и граничные условия, различные параметры и информацию об источниках и стоках.

Во многих случаях временные данные об источниках загрязнения неполны или вовсе отсутствуют, поскольку не проводились замеры, или расположение источников загрязнения делает измерения невозможными. Поэтому задача восстановления источников на основе доступных данных становится практически важной для моделирования грунтовых вод. Ниже мы опишем модель и приложим изложенную выше теорию восстановления источников к упомянутой задаче.

2.1. Математическая модель. Процесс переноса загрязнения грунтовыми водами может быть достаточно адекватно описан двумерными дифференциальными уравнениями в частных производных. Эта модель получается посредством усреднения трехмерных уравнений по глубине водного слоя в предположении, что распределение давления гидростатическое.

Ниже рассматривается однослойная модель движения жидкости и переноса загрязнения, базирующаяся на этом предположении. В модели полагается, что ускорение Кориолиса незначительно (предположение Дюпуи (*Dupuit*)). В этом случае все скорости в водном бассейне горизонтальны и параллельны одна другой.

Основные принципы модели – законы сохранения для масс жидкости и загрязнения. Нелинейная гидродинамическая модель, описывающая скорости потока грунтовых вод и концентрацию загрязнения, задается в следующем виде [2-4]:

$$\frac{\partial(\varepsilon_0 \cdot H)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon \cdot (H - h_b) \cdot U) = Q_H, \quad (2.1)$$

$$U = -K \cdot \operatorname{grad}(H), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\Theta \cdot (H - h_b) \cdot C)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon \cdot (H - h_b) \cdot U \cdot C) + \Theta \cdot (H - h_b) \cdot \sigma \cdot C = \\ = \operatorname{div}(\varepsilon \cdot (H - h_b) \cdot D \cdot \operatorname{grad} C) + Q_C. \quad (2.3)$$

Здесь $t \in T$ — время, $x, y \in \sigma \subset R^2$ — декартовы координаты, $U = (u, v) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ — компоненты усредненных по глубине горизонтальных скоростей в направлениях x и y , $H = H(x, y, t)$ — "главное" превышение свободной поверхности водного бассейна, $h_b = h_b(x, y, t)$ — профиль непроницаемой материковой породы, $C = C(x, y, t)$ — концентрация переносимого вещества, $K = K(x, y, t)$ — тензор проводимости, $D = D(x, y, t)$ — тензор гидродинамической дисперсии, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x, y, t)$ — "дренажная" пористость, $\varepsilon = \varepsilon(x, y, t)$ — кинематическая пористость, θ — коэффициент сорбции, σ — скорость распада субстанции, $\Theta = \Theta(x, y, t) = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \cdot \theta$ — специфический фактор торможения.

Правые части $Q_C = Q_C(x, y, t)$ и $Q_H = Q_H(x, y, t)$ моделируют источники и стоки:

$$Q_H = Q_H^r + Q_H^{pl} - Q_H^{po} + Q_H^s, \quad Q_C = Q_H^r C^r + Q_H^s C^s - Q_H^{po} C, \quad (2.4)$$

Q_H^r — скорость объемной зарядки, Q_H^{pl} — скорость объемного поступления незагрязненной воды в точку (x, y) , Q_H^{po} — скорость объемной разрядки в точке (x, y) , Q_H^s — скорость объемного потока источника загрязнения в точке (x, y) , C^s — концентрация сжатой жидкости в источнике загрязнения, расположенном, как описано выше, C^r — концентрация.

Двумерные нелинейные уравнения (2.1), (2.2) и (2.3) описывают распределение усредненных по глубине горизонтальных скоростей $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$, уровень воды $H(x, y, t)$ и концентрацию загрязнения $C = C(x, y, t)$. Будем считать, что уровень воды $H = H(x, y, t)$ есть известная функция, и поэтому скорости $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ известны, что вытекает из уравнения (2.2). Рассмотрим только уравнение переноса массы типа "конвенция-дисперсия" (2.3). В общем виде оно учитывает влияние конвенции, дисперсии, источников и стоков. Составные реакции и взаимодействия также могут быть включены, если известно, как составные части взаимодействуют друг с другом. Таким образом, различные процессы, параметры переноса и распределения водной массы, а также разнообразные загрязнения также могут быть изучены посредством упомянутого уравнения. Определение граничных и начальных условий зависит от природы задачи.

2.2. Численные алгоритмы. Опишем численные алгоритмы решения уравнений переноса, которые были использованы в вычислительных экспериментах. Рассмотрим четырехугольную область G . Введем на T временную сетку ω_τ и пространственную сетку ω_h на σ :

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N_\tau, \tau = t_0/N_\tau\},$$

$$\omega_h = \{(x_i, y_j) \in G, x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, \Delta x = \ell_x/N_x, \Delta y = \ell_y/N_y,$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_x, j = 0, 1, 2, \dots, N_y\}.$$

Для численного решения уравнения (2.3) применим два конечно-разностных алгоритма:

a) конечно-разностная схема, основанная на неявной процедуре альтернативных направлений (схема типа ADIP) [22];

b) полностью неявная конечно-разностная схема с техникой ADI-итера-

ций, основанная на методе стабилизирующей коррекции Дугласа-Рэшфорда. Конечно-разностная схема находит величины неизвестных пространственных переменных на временном шаге $n+1$ (t_{n+1}) при условии, что пространственное распределение неизвестных переменных на n -м шаге известно. Нулевой момент времени t_0 соответствует начальному условию.

Здесь мы опишем разностную аппроксимацию общего уравнения переноса (2.3), основанную на ADIP. Она представляется следующими двумя шагами:

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_{i,j}(HC)_{i,j}^{n+1/2} - \Theta_{i,j}(HC)_{i,j}^n}{0,5\Delta t} + \frac{WC_{i+1/2,j}^{n+1/2} - WC_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} - \\ & - \frac{WD_{i+1/2,j}^{n+1/2} - WD_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \sigma \cdot \Theta_{i,j}(HC)_{i,j}^{n+1/2} = \\ & = \frac{WD_{i,j+1/2}^n - WD_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{WC_{i,j+1/2}^n - WC_{i,j-1/2}^n}{\Delta x} + (Q\bar{C})_{i,j}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_{i,j}(HC)_{i,j}^{n+1} - \Theta_{i,j}(HC)_{i,j}^{n+1/2}}{0,5\Delta t} + \frac{WC_{i,j+1/2}^{n+1} - WC_{i,j-1/2}^n}{\Delta x} - \\ & - \frac{WD_{i,j+1/2}^{n+1} - WD_{i,j-1/2}^n}{\Delta x} + \sigma \cdot \Theta_{i,j}(HC)_{i,j}^{n+1} = \\ & = \frac{WD_{i+1/2,j}^{n+1/2} - WD_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{WC_{i+1/2,j}^{n+1/2} - WC_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + (Q\bar{C}^{n+1/2})_{i,j}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} WC_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= \frac{\varepsilon_{i+1,j} + \varepsilon_{i,j}}{2} \cdot \frac{(H_{i+1,j}^{n+1} - h_{bi+1,j}) + (H_{i,j}^{n+1} - h_{bi,j})}{2} \times \\ & \times \left[u_{i+1/2,j}^{n+1/2} \frac{C_{i+1,j}^{n+1/2} + C_{i,j}^{n+1/2}}{2} - |u_{i+1/2,j}^{n+1/2}| \frac{C_{i+1,j}^{n+1/2} - C_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WC_{i,j+1/2}^{n+1} &= \frac{\varepsilon_{i+1,j} + \varepsilon_{i,j}}{2} \cdot \frac{(H_{i,j+1}^{n+1} - h_{bi,j+1}) + (H_{i,j}^{n+1} - h_{bi,j})}{2} \times \\ & \times \left[u_{i,j+1/2}^{n+1} \frac{C_{i,j+1}^{n+1} + C_{i,j}^{n+1}}{2} - |v_{i,j+1/2}^{n+1}| \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WC_{i,j+1/2}^n &= \frac{\varepsilon_{i,j+1} + \varepsilon_{i,j}}{2} \cdot \frac{H_{i,j+1}^n + H_{i,j}^n}{2} \times \left[v_{i,j+1/2}^n \frac{C_{i,j+1}^n + C_{i,j}^n}{2} - \right. \\ & \left. - |v_{i,j+1/2}^n| \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n}{2} \right], \end{aligned}$$

$$WD_{i+1/2,j}^{n+1/2} = [\varepsilon D_{xx}(H^{n+1/2} - h_b)]_{i+1/2,j} \frac{C_{i+1,j}^{n+1/2} - C_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x},$$

$$WD_{i,j+1/2}^{n+1} = [\varepsilon D_{yy}(H^{n+1} - h_b)]_{i,j+1/2} \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}.$$

Разностные уравнения (2.5), (2.6) обладают абсолютно устойчивой

сходимостью.

Чтобы решить уравнения (2.5) и (2.6), перепишем каждое из них в следующем виде:

$$A_i z_{i-1} - B_i z_i + B_i z_{i+1} = -F_i, \quad i=1, \dots, N-1 \quad (2.7)$$

с соответствующими условиями

$$z_0 = \alpha_1 z_1 + \beta_1, \quad z_N = \alpha_2 z_{N-1} + \beta_2,$$

где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ зависят от типа граничных условий.

Для решения уравнения (2.7) применимы упрощенный метод исключения Гаусса или так называемый алгоритм обратной прогонки.

2.3. Обратная задача. Исследуется задача восстановления источника загрязнения: определить меняющуюся во времени интенсивность источника $Q_C = Q_C(x, y, t)$ на основе измерений концентрации в некоторой пространственной области. Вообще говоря, решение этой задачи не единственно (это обсуждалось в предыдущем разделе). Однако в частных случаях

$$Q_C(x, y, t) = u(t)\omega(x, y),$$

где $\omega(x, y)$ известная функция, единственность реконструкции может быть достигнута. Мы рассматриваем вопрос о реконструкции временной составляющей функции источника $u(t)$ для следующей граничной задачи для линейного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с постоянными коэффициентами в прямоугольной области G (частный случай уравнения (2.3)):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \gamma C - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = u(t)\omega(x, y). \quad (2.8)$$

Здесь u, v, γ, D — константы, $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, функции $\omega(x, y)$ и $u(t)$ кусочно-гладкие. Для уравнения (2.8) рассматриваются следующие граничные и начальные условия:

$$C(t, x, t) |_{\Gamma} = 0, \quad C(0, x, y) = 0.$$

Предположим, что измерения задаются такой функцией от времени:

$$z(t) = \iint_G C(t, x, y) p(x, y) dx dy;$$

здесь неотрицательная кусочно-непрерывная в G функция $p(x, y)$ определяет область, где производится наблюдение концентрации загрязнения:

$$P = \{(x, y): (x, y) \in G, p(x, y) \geq 0\}.$$

Чтобы решить обратную задачу, т.е. найти временную составляющую $u(t)$ функции источника Q_C по результатам наблюдений $z(t)$, можно применить метод восстановления входа для параболических систем, описанный в предыдущих разделах.

Кратко напомним его суть. Сначала одним из алгоритмов, описанных в разделе 2.2, решается прямая задача. Для этого задаются область G , размеры клеток сетки $\Delta x \times \Delta y$ и количество временных шагов N_t . Функции $z(t)$ и $\omega(x, y)$ известны. После решения прямой задачи выбирается область P , где сосредоточены наблюдения концентрации загрязнения, а также задается функция $p(x, y)$. Следующим шагом является решение конечно-разностного уравнения для сопря-

женной задачи по той же самой конечно-разностной методике (схема ADIP-типа или полностью неявная схема). Для уравнения (2.8) рассматривается сопряженная задача:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma \zeta - D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0$$

в той же области G со следующими граничными и начальными условиями:

$$\zeta(t, x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad \zeta(0, x, y)|_{\Gamma} = p(x, y).$$

После решения уравнения (2.8) используется аппроксимационный алгоритм 2, изложенный в разделе 1.10. Для простоты рассматривается задача с одним точечным источником и с одним наблюдением.

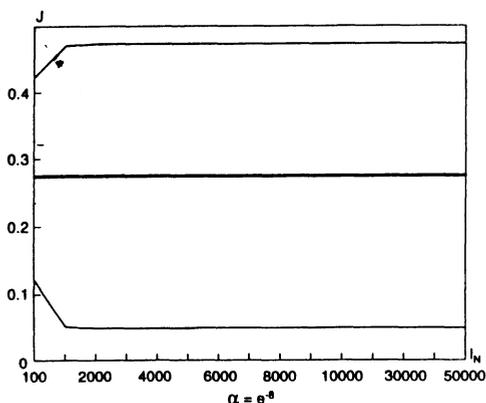


Рис. 1

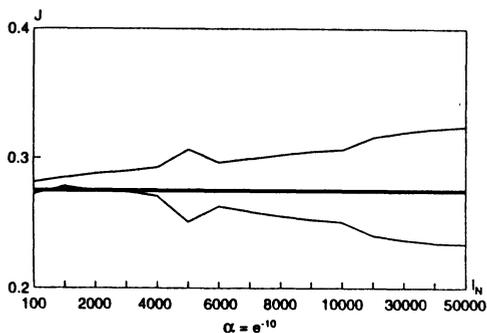


Рис. 2

2.4. Результаты тестирования. Для тестирования алгоритма были проведены вычисления с различными величинами следующих параметров: регуляризации α , количества итераций l_N , количества временных шагов N_t . Выбраны следующие значения:

G — прямоугольник 53×53 с вершинами в начале координат и сторонами, лежащими на осях Ox и Oy ;

размерность пространственной сетки ω_h : $N_x = N_y = 53$ ($\Delta x = \Delta y = 1$);

размерность временной сетки: $N_\tau = 40$, $\tau = 45$;

коэффициент дисперсии $D = 18.33$;

параметры τ_1 и τ_2 из раздела 1.8: $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0.5$.

На рис.1-6 приводятся результаты вычисления (J_N^{\min}, J_N^{\max}) для различных значений параметра α . Жирной линией представлено точное значение $J_N^{\min} = J_N^{\max} = 0.275437$ для функции $u(t) = \sin(t)$.

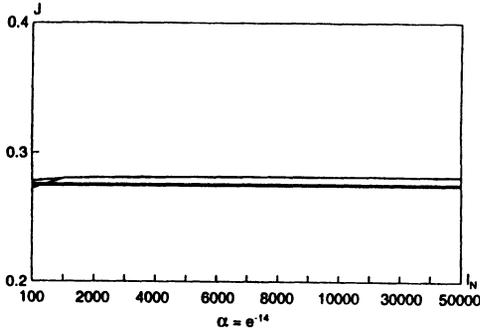


Рис. 3

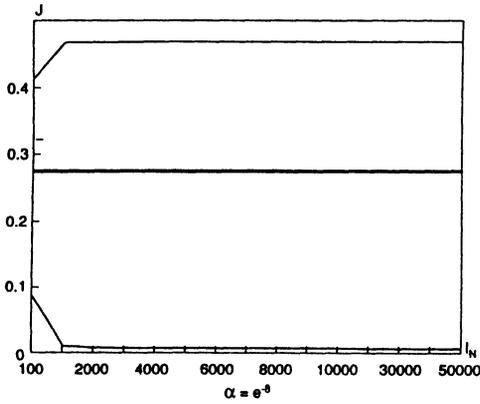


Рис. 4

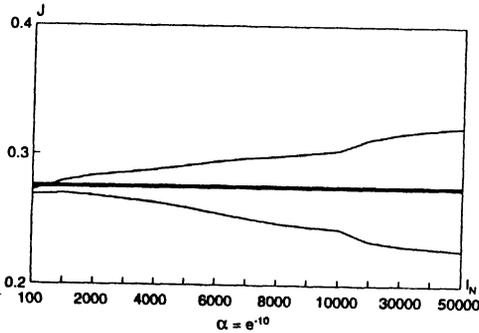


Рис. 5

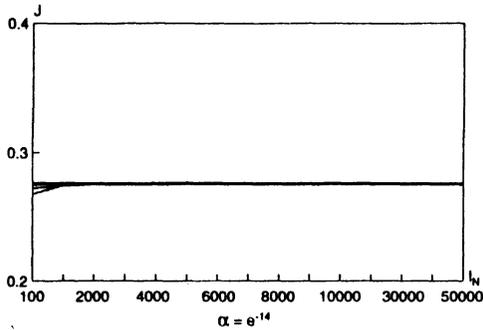


Рис. 6

Рис.1-3 отвечают случаю, когда для решения прямой и сопряженной задач использовалась схема ADIP, а рис.4-6 – случаю, когда использовалась полностью неявная схема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.И. Марчук. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982, 319 с.
2. J. Bear, A. Verruijt. Modeling Groundwater Flow and Pollution. – D. Reidel Publishing Company, Holland, 1987, 284 p.
3. Ю.А. Криксин, Е.А. Самарская, В.Ф. Тишкин. Балансовая модель распространения примеси в плановом фильтрационном потоке. // Математическое моделирование, 1993, т.5, № 6, с. 69-84.
4. E. Samarakaia. Simulation Models of Groundwater Contamination in Enviromental Information Systems. 14th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics. Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, USA, July 11-15, 1994.
5. B.E. Ainseba, J.-P. Kernevez, E. Luce. Application des sentinelles a l'identification des pollution une rivere. // RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1994, v. 28, № 3, p. 297-312.
6. H.T. Banks, K. Kunisch. An approximation theory for nonlinear partial differential equations with applications to identification and control. // SIAM J. Control Optimiz., 1982, v. 20, p. 815-849.
7. V. Barbu. The approximative solvability of the inverse one-phase Stefan problem. // in: Numerical Treatment of the Free Boundary Problems. – P. Neittaanmaki, ed., Birkhauser, Basel, 1991, p. 117-123.
8. K. Kunisch, L.M. White. Regularity properties and strict complementary of the outputleast-squares approach to parameter estimation in parabolic equation. // Inverse Problems, 1989, v. 5, № 1, p. 13-33.
9. A.B. Kurzhanski, A.Yu. Khapalov. An observation theory for distributed parameter systems. // IASA Working Paper WP-90-79, IASA, Laxenburg, 1990, 52 p.
10. М.М. Лаурентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. Некорректные задачи в анализе и математической физике. – М.: Наука, 1980, 127 с.
11. В.И. Максимов. Численное решение одной обратной задачи для уравнения теплопроводности. // Автоматика и телемеханика, 1993, № 2, с. 83-92.
12. А.В. Кражимский, Ю.С. Осипов. К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Некоторые методы позиционного и программного управления. – УНЦ АН СССР, Свердловск, 1987, с. 34-54.
13. Yu.S. Osipov, A.V. Kryazhinski. Inverse problem of ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995, 653 p.
14. Ю.С. Осипов, А.В. Кражимский, В.И. Максимов. Задачи динамической регуляризации для систем с

- распределенными параметрами. — УрО РАН, Свердловск, 1991, Препринт Института математики и механики, 114 с.
15. *V.I. Maksimov*. Modelling of point sources via the result of unaccurate measurements. — Fifth International Symposium on Dynamic Games and Applications, Conches, July 13 — Grimentz, July 15–17, Preprint Volume, June 16, 1992, Universite de Geneve.
 16. *V.I. Maksimov*. Inverse problems for variational inequalities. // Internat. Series of Numerical Mathem., 1992, v. 107, p. 275–286, Birkhauser Verlag, Basel.
 17. *A.V. Kryazhinskii, Yu.S. Osipov*. Input reconstructibility for linear dynamics, ordinary differential equation. // IIASA WP-93-65, 1993, 38 p.
 18. *A.V. Kryazhinskii*. Convex optimization via feedbacks. // IIASA Working Paper WP-94-109, IIASA, Laxenburg, 1994, 25 p.
 19. *А.Н. Тихонов, В.Ю. Арсенин*. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979, с. 285.
 20. *Ф.П. Васильев*. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981, 400 с.
 21. *Ж.-Л. Лионс*. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972, 416 с.
 22. *D.W. Peaseman, H.H. Rachford*. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. // J. Industr. Math. Soc., 1955, № 3, p. 28–41.

Поступила в редакцию
16.10.95.