УДК 517.977.1

Оптимизация циклических процессов с дисконтированием по усилию и выгоде

А. А. Давыдов [1,2], Т. С. Шуткина [1]

[1] Владимирский государственный университет
600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87

[2] International Institute for Applied Systems Analysis
(Международный институт прикладного системного анализа)
A-2361, Austria, Laxenburg, Schlossplatz, 1

davydov@vlsu.ru, davydov@iiasa.ac.at, shutkina@vlsu.ru

Получено 11 марта 2010 г.

Для непрерывного управляемого циклического процесса с дисконтированием по доходу и прилагаемым усилиям доказана теорема существования процесса с максимальной средней временной выгодой. Найдено соответствующее необходимое условие оптимальности и показано, что при дифференцируемой плотности выгоды с конечным числом критических точек такой процесс использует только максимальные и минимальные скорости движения, как и в модели Арнольда без дисконтирования.

Ключевые слова: усредненная оптимизация, периодический процесс, необходимое условие оптимальности, дисконтирование

A. A. Davydov, T. S. Shutkina

Time average optimization of cycle process with profit and effort discounts

We prove the existence of solution in the problem of time averaged optimization of cyclic processes with both profit and effort discounts and find the respective necessary optimality condition. It is shown that optimal strategy could be selected piecewise continuous if a differentiable profit density has a finite number of critical points. In such a case the optimal motion uses only maximum and minimum velocities as in Arnold's case without any discount.

Keywords: average optimization, periodic process, necessary optimality condition, discount
Mathematical Subject Classification 2000: 49J15, 49K15, 49N20

Введение

Циклический процесс моделируется управляемой системой на окружности, задаваемой полем скоростей v, гладко зависящим от точки x окружности и управляющего параметра u. Предполагается, что этот параметр пробегает гладкое компактное многообразие (или объединение таковых) и принимает не менее двух различных значений, а все допустимые скорости положительные, то есть $v > 0$.

Допустимым движением системы называется абсолютно непрерывное отображение $x\colon t \mapsto x(t)$ промежутка временной оси на окружность, в точках дифференцируемости которого его производная лежит в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей этой точки. В силу положительности скоростей системы любое допустимое движение системы, определенное при всех временах, совершает вращение на окружности в одном направлении.

Циклическим движением или просто *циклом* называется периодическое допустимое движение, повторяющееся после одного оборота по окружности. Время, затрачиваемое циклом на один оборот, называется его периодом. При наличии непрерывной *плотности выгоды* f на окружности возникает задача выбора цикла с максимальной средней временной выгодой за один оборот:

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x(t))dt \to \max, \tag{1}$$

где T — период цикла. Известно, что такой цикл существует при достаточно общих ограничениях на управляемую систему и плотность выгоды и что соответствующее ему допустимое движение устроено довольно просто: оно использует максимальные и минимальные допустимые скорости на участках, где плотность выгоды, соответственно, меньше либо больше максимальной средней временной выгоды за цикл [1], [2], [3]. Понятно, что при плотности выгоды с конечным числом критических точек такая стратегия однозначно определяет допустимое движение, и это движение имеет лишь конечное число переключений между максимальной и минимальной допустимыми скоростями.

Недавно этот результат был обобщен на случай с дисконтированием получаемой выгоды, то есть когда подынтегральное выражение в (1) умножается на экспоненту $e^{-\alpha t}$ с некоторым положительным показателем α [4]. В данной работе мы распространяем этот результат на случай, когда присутствует также дисконтирование и по прилагаемому усилию с показателем β, то есть для задачи

$$\int\limits_0^T e^{-\alpha t} f(x(t))dt / \int\limits_0^T e^{-\beta t}dt, \to \max\,. \tag{2}$$

Если показатель дисконтирования α снижает ценность позднее получаемой выгоды, то показатель β характеризует изменение способности управляемого объекта извлекать выгоду при продвижении по циклу. На наш взгляд, значение показателя β может быть как отрицательным, так и положительным, что доставляет, соответственно, снижение (например, в силу усталости или износа объекта), либо повышение (например, благодаря получению опыта объектом) этой способности при продвижении по циклу.

1. Оптимальное решение и его структура

Здесь сформулированы основные результаты работы.

1.1. Переформулировка задачи

В точках дифференцируемости цикла $x : t \mapsto x(t)$ определим плотность (=*плотность усилия*) $\rho, \rho(x(t)) = 1/\dot{x}(t)$. Учитывая, что все допустимые скорости положительны по предположению, получаем, что последнее равенство однозначно определяет эту плотность почти всюду на окружности. В любой из остальных точек окружности доопределим эту плотность некоторым значением, соответствующим произвольной допустимой скорости в этой точке (понятно, что это не влияет на движение по циклу). Учитывая, что почти всюду имеем $dt = \rho(x(t))dx(t)$, задачу (2) перепишем в виде

$$A_\rho(f) := \int\limits_0^{2\pi} e^{-\alpha \int\limits_0^x \rho(z)dz} f(x)\rho(x)dx / \int\limits_0^{2\pi} e^{-\beta \int\limits_0^x \rho(z)dz} \rho(x)dx \to \max,$$

или

$$A_\rho(f) := \beta\alpha^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(x) de^{-\alpha\phi(x)} / \int\limits_0^{2\pi} de^{-\beta\phi(x)} \to \max, \tag{1.1}$$

где $\phi(x) = \int\limits_0^x \rho(z)dz$, а 0 и 2π — это начальная и конечная точки цикла. В такой формулировке задачи необходимо найти измеримую плотность ρ, доставляющую максимум функционала средней временной выгоды $A_\rho(f)$ и удовлетворяющую ограничениям

$$r_1 \leqslant \rho \leqslant r_2, \tag{1.2}$$

где ограничения r_1 и r_2 — положительные функции, равные обратным значениям максимума и минимума допустимой скорости соответственно. Плотность усилия, удовлетворяющую ограничениям (1.2), будем называть *допустимой*.

Отметим, что для непрерывной управляемой системы функции r_1 и r_2 непрерывны. Более того, в типичном случае эти функции могут иметь одинаковые значения лишь в конечном числе точек и только при равном двум числе различных значений управляющего параметра. Всюду ниже мы предполагаем выполненными эти условия на функции ограничения.

1.2. Существование оптимальной плотности

Рассмотрим среднюю временную выгоду $A_\rho(f)$ как значение функционала $A_{(.)}(f)$ на допустимой плотности усилия ρ. Функционал $A_{(.)}(f)$ непрерывен на пространстве измеримых интегрируемых на окружности функций.

Предложение 1.1. *Функционал $A_{(.)}(f)$ ограничен на множестве допустимых плотностей усилия, точнее, для непрерывной плотности выгоды f и непрерывных положительных функций r_1, r_2 и любой допустимой плотности ρ справедливо неравенство*

$$|A_\rho(f)| \leqslant Mm_2 e^{2\pi\beta m_2}/m_1,$$

где $m_1 = \min\{r_1(x), 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$, $m_2 = \max\{r_2(x), 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$, $M = \max\{|f(x)|, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$.

Действительно, в силу

$$|e^{-\alpha \int\limits_0^x \rho(z)dz} f(x)\rho(x)| \leqslant Mm_2 \qquad \text{и} \qquad e^{-\beta \int\limits_0^x \rho(z)dz} \rho(x) \geqslant e^{-2\pi\beta m_2} m_1$$

имеем

$$|A_\rho(f)| = \frac{|\int\limits_0^{2\pi} e^{-\alpha \int\limits_0^x \rho(z)dz} f(x)\rho(x)dx|}{|\int\limits_0^{2\pi} e^{-\beta \int\limits_0^x \rho(z)dz} \rho(x)dx|} \leqslant \frac{|\int\limits_0^{2\pi} Mm_2 dx|}{|\int\limits_0^{2\pi} e^{-2\pi\beta m_2} m_1 dx|} = \frac{Mm_2 e^{2\pi\beta m_2}}{m_1},$$

что и доказывает предложение.

Таким образом, все значения функционала $A_{(.)}(f)$ на допустимых плотностях усилия образуют ограниченное множество. Обозначим через A точную верхнюю грань этого множества.

Теорема 1.2. *Для непрерывной плотности выгоды f и непрерывных положительных функций ограничения r_1, r_2 существует допустимая плотность, доставляющая максимум A средней временной выгоды.*

Эта теорема доказана в следующем параграфе.

1.3. Необходимое условие экстремума

Одним из инструментов поиска оптимальных решений является необходимое условие экстремума. Следующее утверждение доставляет такое условие для функционала средней временной выгоды.

Теорема 1.3. *Если при непрерывной функции f и непрерывных положительных функциях ограничения r_1, r_2 допустимая плотность ρ доставляет максимум A средней временной выгоды, то в любой точке x, где ρ является производной своего интеграла, значение*

$$e^{-\alpha \int\limits_0^x \rho(z)dz} f(x) + \alpha(P(x) - P(2\pi)) - e^{-\beta \int\limits_0^{2\pi} \rho(z)dz} A, \tag{1.3}$$

где $P(s) = \int\limits_0^s e^{-\alpha \int\limits_0^y \rho(z)dz} f(y)\rho(y)dy$, является неположительным, неотрицательным или равным нулю, если $\rho(x)$ равно, соответственно, или $r_1(x)$, или $r_2(x)$, или принадлежит интервалу $(r_1(x), r_2(x))$.

Эта теорема также доказана в следующем параграфе.

Рассмотрим (1.3) как значение некоторой функции S в точке x. В силу теоремы эта функция играет роль *функции переключения* в том смысле, что оптимальная плотность должна принимать максимальное и минимальное значение там, где эта функция положительна и отрицательна соответственно. При $\alpha \neq \beta = 0$ функция S совпадает с функцией переключения в работах [1] и [4].

Отметим, что после задания константы $\alpha P(2\pi) - e^{-\beta \int\limits_0^{2\pi} \rho(z)dz} A$ функция S позволяет однозначно определять движение по циклу, при условии, что вычисляемая по ходу движения функция имеет лишь изолированные нули. Этот факт позволяет построить численный алгоритм поиска цикла с максимальной средней временной выгодой.

Аналитический же анализ функции переключения приводит к следующим результатам.

Предложение 1.4. *При дифференцируемой плотности выгоды f и непрерывных положительных функциях ограничения r_1, r_2 функция переключения S также дифференцируема. Более того, нули производных этих двух функций одинаковы.*

Действительно, для дифференцируемой плотности выгоды функция переключения может быть переписана в виде

$$S(x) = \int\limits_0^x e^{-\alpha \int\limits_0^y \rho(z)dz} f'(y)dy + f(0) - \alpha P - e^{-\beta \int\limits_0^{2\pi} \rho(z)dz} A \qquad (1.4)$$

после интегрирования по частям. В этой форме функции переключения ее дифференцируемость очевидна, и

$$S'(x) = e^{-\alpha \int_0^x \rho(x)dz} f'(x),$$

что нетрудно видеть. Но экспонента не обращается в нуль, поэтому производные функций f и S обращаются в нуль одновременно.

Из предложения 1.4 вытекает

Теорема 1.5. *Для дифференцируемой плотности выгоды f, с конечным числом k критических точек и непрерывных положительных функций r_1 и r_2 плотность усилия, доставляющая максимум средней временной выгоды, является кусочно-непрерывной функцией, принимающей значение r_1 или r_2 внутри любого интервала отрицательности и положительности соответствующей ей функции переключения.*

Действительно, в силу теоремы Ролля производная дифференцируемой функции обязательно обращается в нуль между двумя соседними нулями самой функции. В частности, число нулей этой функции конечно, если конечно число нулей ее производной. В силу предложения 1.4 производная функции переключения также имеет k нулей. Следовательно, сама функция переключения имеет конечное число нулей, а оптимальная плотность усилия принимает значение r_1 или r_2 внутри любого интервала, не содержащего нулей этой функции и граничных точек $0, 2\pi$.

2. Доказательство теорем

Здесь мы сначала устанавливаем существование оптимальной плотности усилия, а затем находим необходимое условие экстремума.

2.1. Доказательство существования решения

Для доказательства теоремы 1.2 рассмотрим последовательность допустимых плотностей ρ_n, таких, что $A_{\rho_n}(f) \to A$ при $n \to \infty$. В силу ограничения (1.2) соответствующие функции ϕ_n,

$$\phi_n(x) = \int\limits_0^x \rho_n(z)dz,\ x \in [0, 2\pi],$$

удовлетворяют условию

$$m_1(y - x) \leqslant \phi_n(y) - \phi_n(x) \leqslant m_2(y - x) \qquad (2.1)$$

для любых $x, y \in [0, 2\pi]$, $x \leqslant y$. В частности, все ϕ_n — это липшецевы функции с одной и той же константой m_2, а последовательность этих функций ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Следовательно, по теореме Арцела–Асколи существует подпоследовательность из этих функций, равномерно сходящаяся на этом отрезке к некоторой функции ϕ.

Переходя в условии (2.1) к пределу по членам этой подпоследовательности, получаем, что функция ϕ также удовлетворяет этому условию. Следовательно, эта функция абсолютно непрерывна, дифференцируема почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$, а ее производная удовлетворяет ограничению (1.2) в точках своего существования.

Доопределяя в остальных точках эту производную любым возможным значением, например, значением r_1, получим допустимую плотность, доставляющую максимум средней временной выгоды, что нетрудно видеть.

2.2. Необходимое условие оптимальности

Утверждение теоремы 1.3 доказывается вычислением вариации функционала $A_\rho(f)$ при подходящей вариации оптимальной плотности усилия ρ. Не нарушая общности, считаем, что точка x принадлежит интервалу $(0, 2\pi)$. Для граничных значений интервала рассуждения аналогичны.

Возьмем достаточно малое положительное ν, такое, что отрезок $[x, x+\nu]$ лежит в $(0, 2\pi)$, и рассмотрим новую плотность $\tilde{\rho}$, отличающуюся от плотности ρ лишь на этом отрезке на постоянную величину h. Обозначая через T суммарное (дисконтированное) усилие для плотности ρ,

$$T = \int\limits_0^{2\pi} e^{-\beta\phi(x)}\rho(x)dx,$$

где, как и выше, $\phi(x) = \int\limits_0^x \rho(z)dz$, получим для такого усилия для плотности $\tilde{\rho}$ выражение

$$\tilde{T} = T + h\nu e^{-\beta\phi(x)} - \beta h\nu \int\limits_x^{2\pi} e^{-\beta\phi(x)}\rho(x)dx + \ldots,$$

где многоточие (здесь и далее) означает члены более высокого порядка по h, ν.

Вычисляя теперь разницу $A_{\tilde{\rho}}(f) - A_\rho(f)$ по частям на отрезках $[0, x]$, $[x, x+\nu]$ и $[x+\nu, 2\pi]$, получим, соответственно,

$$\frac{\int\limits_0^x e^{-\alpha\phi(y)} f(y)\rho(y)dy}{T + h\nu e^{-\beta\phi(x)} - \beta h\nu \int_x^{2\pi} e^{-\beta\phi(y)}\rho(y)dy + \ldots} - \frac{\int\limits_0^x e^{-\alpha\phi(y)} f(y)\rho(y)dy}{T} =$$

$$= \frac{h\nu}{T} \times \frac{(\beta \int_x^{2\pi} e^{-\beta\phi(y)}\rho(y)dy - e^{-\beta\phi(x)}) \int\limits_0^x e^{-\alpha\phi(y)} f(y)\rho(y)dx}{T} + \ldots,$$

$$\frac{\int\limits_{x}^{x+\nu} e^{-\alpha\int\limits_0^y(\rho(z)+h)dz} f(y)(\rho(y)+h)dy}{T+h\nu e^{-\beta\phi(x)}-\beta h\nu\int_x^{2\pi}e^{-\beta\phi(y)}\rho(y)dy+\ldots}-\frac{\int\limits_{x}^{x+\nu} e^{-\alpha\phi(y)}f(y)\rho(y)dy}{T}=$$
$$=\frac{h\nu}{T}\times e^{-\alpha\phi(x)}f(x)+\ldots,$$

$$\frac{\int\limits_{x+\nu}^{2\pi} e^{-\alpha[\int\limits_0^y\rho(z)dz+h\nu]} f(y)\rho(y)dy}{T+h\nu e^{-\beta\phi(x)}-\beta h\nu\int_x^{2\pi}e^{-\beta\phi(y)}\rho(y)dy+\ldots}-\frac{\int\limits_{x+\nu}^{2\pi} e^{-\alpha\phi(y)}f(y)\rho(y)dy}{T}=$$
$$=\frac{h\nu}{T}\times\frac{(-\alpha T+\beta\int_x^{2\pi}e^{-\beta\phi(y)}\rho(y)dy-e^{-\beta\phi(x)})\int\limits_x^{2\pi}e^{-\alpha\phi(y)}f(y)\rho(y)dx}{T}+\ldots.$$

Складывая правые части последних трех равенств, получим разность $A_{\tilde\rho}(f)-A_\rho(f)$ в виде

$$\frac{h\nu}{T}\left[e^{-\alpha\phi(x)}f(x)+\alpha P(x)-\alpha P(2\pi)+\beta A\int\limits_x^{2\pi}e^{-\beta\phi(y)}\rho(y)dy-e^{-\beta\phi(x)}A\right]+\ldots,$$

где $A=A_\rho(f)$.

Таким образом, для малых h и $\nu>0$ знак полученной разности определяется знаками h и выражения, стоящего в квадратных скобках, так как значения периода T и ν положительные. Это выражение вычислением интеграла $\int\limits_x^{2\pi}e^{-\alpha\phi(y)}\beta A\rho(y)dy$ приводится к виду

$$e^{-\alpha\phi(x)}f(x)-\alpha(P(x)-P(2\pi))-e^{-\beta\phi(2\pi)}A,$$

что совпадает с (1.3), ибо $\phi(x)=\int\limits_o^x\rho(y)dy$. Для оптимальной плотности, в каждой точке x, где ρ является производной своего интеграла, разность должна быть неотрицательной. Следовательно, выражение, стоящее в квадратных скобках, неположительно, неотрицательно или равно нулю, если значение $\rho(x)$, соответственно, равно либо $r_1(x)$, либо $r_2(x)$, или принадлежит интервалу $(r_1(x),r_2(x))$ так как h может принимать либо только неположительные, либо только неотрицательные, либо как неположительные, так и неотрицательные значения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП РНПВШ-2.1.1/5568 и программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его прил., 2002, т. 36, №2, с. 1-–11.

[2] Давыдов А. А., Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Дифференциальные уравнения и динамические системы: Сб. ст. (Тр. МИАН, т. 250.) М.: Наука, 2005. С. 79-–94 [Davydov A. A. Generic profit singularities in Arnold's model of cyclic processes // Proc. Steklov Inst. Math., 2005, vol. 250, no. 3, pp. 70–84].

[3] Davydov A. A., Mena-Matos H. Singularity theory approach to time averaged optimization // Singularities in geometry and topology. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2007. P. 598–628.

[4] Давыдов А. А., Шуткина Т. С. Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде // УМН, 2009, т. 64(385), с. 143–144.